INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XX. BAND ZWEITES HEFT 1952

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11.50

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Szablewski, W., Zur Theorie der turbulenten Strömung von Gasen stark veränderlicher Dichte 67

Szablewski, W., Turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahle von fast gleicher Geschwindigkeit und stark unterschiedlicher Temperatur. Mit 5 Textabbildungen 73

Schäfer, A., Das polarisationsoptische Verhalten der Kunststoffe Celluloid und Dekorit. Mit 8 Textabbildungen 81

Dörr, J., Über zwei mit der Tragflügeltheorie in Zusammenhang stehende Integralgleichungen 88

Lembcke, H.-R., Biege- und Torsionsschwingungen von Stäben mit beliebigen Querschnitten. Mit 9 Textabbildungen 91

Woinowsky-Krieger, S., Über die Stabilität punktweise ausgesteifter Rechteckplatten. Mit 1 Textabbildung 106

Wieghardt, K., Über einige Versuche an Strömungen in Sand. Mit 10 Textabbabbildungen 109

Wuest, W., Der Einfluß der Querschnittsform auf das Verhalten von Bourdonfedern. Mit 10 Textabbildungen 116

Craemer, H., Die Formänderungen idealplastischer statisch bestimmter Balken. Mit 1 Textabbildung 126

Craemer, H., Ausnutzungslinien als Darstellungsmittel in der Plastostatik. Mit 10 Textabbildungen 129

Pestel, E., Berichtigung 136

INGENIEUR-ARCHIV

XX. BAND ZWEITES HEFT 1952

Zur Theorie der turbulenten Strömung von Gasen stark veränderlicher Dichte*.

Von W. Szablewski.

1. Einleitung. Fundamental wichtige Phänomene in der Theorie der turbulenten Strömungen, wie die Ausbreitung heißer Gasstrahlen in Luft oder der Wärmeübergang an umströmten heißen Körpern, sind mit größeren Dichteunterschieden verbunden. Wir stellen zur Untersuchung dieser Phänomene in Verallgemeinerung der Betrachtungsweise von *O. Reynolds* und *L. Prandtl* ein Gleichungssystem auf, das die turbulenten Mischungsvorgänge in Feldern mit stark veränderlicher Dichte beschreibt.

2. Der turbulente Mischungsvorgang in statistischer Betrachtungsweise. Wir erinnern kurz an die klassischen Ansätze von *O. Reynolds*[1]. Bei Beschränkung auf Felder von konstanter oder annähernd konstanter Dichte betrachtet *O. Reynolds* Strömungen, die im zeitlichen Mittel stationär sind. Für diese führt er eine statistische Betrachtungsweise durch, indem er bildet

$$u = \bar{u} + u' , \quad v = \bar{v} + v' , \quad \vartheta = \bar{\vartheta} + \vartheta' .$$

Überstrichene Größen bedeuten zeitliche Mittelwerte, gestrichene Größen momentane Schwankungen. Ferner bedeuten x die Hauptströmungsrichtung, y die Querrichtung, u, v die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung, ϱ die Dichte, ϑ die Temperatur, T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck. Vom Standpunkt der im zeitlichen Mittel stationären Strömung ergibt sich dann eine turbulente Schubspannung

$$\tau = -\varrho \overline{u' v'} \tag{1a}$$

bzw. eine turbulente Wärmeleitung

$$Q = -c_p \varrho \overline{\vartheta' v'} . \tag{1b}$$

Wir gehen nun dazu über, die statistische Betrachtungsweise auf Felder mit stark veränderlicher Dichte zu verallgemeinern, und betrachten hierzu einen ebenen Strömungsvorgang, der gekennzeichnet sei durch eine Hauptströmungsrichtung mit turbulentem Austausch quer zu derselben. Die Strömung soll im zeitlichen Mittel stationär sein.

Wir können den Strömungsvorgang, wenn wir molekulare Wirkungen (Diffusion, Reibung, Wärmeleitung) vernachlässigen und der Einfachheit halber konstanten Druck annehmen[2], durch folgende Kontinuitätsgleichungen beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Masse:} && \frac{\partial \overline{\varrho u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho v}}{\partial y} = 0 , \\ &\text{Impuls:} && \frac{\partial \overline{\varrho u u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho v u}}{\partial y} = 0 , \\ &\text{Energie:} && \frac{\partial \overline{\varrho u c_p T}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho v c_p T}}{\partial y} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zeitliche Mittelwerte sind wieder durch Überstreichen gekennzeichnet.

---

* Auszug aus der Göttinger Dissertation 1947: *W. Szablewski*, Die Ausbreitung eines Heißluftstrahls in bewegter Luft.

[1] *O. Reynolds*, Phil. Trans. Roy. Soc. 186 (1895).

[2] Bei Phänomenen der freien Turbulenz entspricht die Annahme konstanten Drucks den üblichen Voraussetzungen. Bei Grenzschichtproblemen haben wir, wenn ein Druckgradient vorhanden ist, auf der rechten Seite der Impulsgleichung (2) das Druckglied $-\frac{d\bar{p}}{dx}$; auf der rechten Seite der Energiegleichung (2) tritt das Glied $\bar{u}\frac{d\bar{p}}{dx}$ auf, demgegenüber die von den Schwankungen herrührenden Glieder $\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial p'}{\partial y}}$ als vernachlässigbar anzusehen sind.

Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung der Wärmeenergie als Repräsentanten der substantiellen Eigenschaften. Würden wir auch noch Beimengungen irgendwelcher Art der Konzentration c zulassen, so hätten wir als weitere Gleichung

$$\frac{\partial \varrho u c}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v c}{\partial y} = 0 ,$$

deren Betrachtung ganz analog der Energiegleichung verläuft.

Unser Ziel ist es, die stationären Werte $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\varrho}$, $\overline{c_p T}$ zu berechnen. Zu diesem Zweck stellen wir u, v, ϱ, $c_p T$ durch ihre zeitlichen Mittelwerte und Schwankungen dar:

$$u = \bar{u} + u' , \quad v = \bar{v} + v' , \quad \varrho = \bar{\varrho} + \varrho' , \quad c_p T = \overline{c_p T} + (c_p T)' .$$

Es ist dann $\overline{\varrho u} = \bar{\varrho}\bar{u} + \overline{\varrho' u'}$, $\overline{\varrho v} = \bar{\varrho}\bar{v} + \overline{\varrho' v'}$,

und aus der Kontinuitätsgleichung der Masse wird

$$\frac{\partial \bar{\varrho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho} \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{\varrho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{\varrho' v'}) . \tag{3a}$$

Bezüglich der Impulsgleichung erhalten wir

$$\overline{\varrho u u} = \overline{\varrho u} \cdot u + \overline{(\varrho u)' u'} = \bar{\varrho}\bar{u}u + \overline{\varrho' u'} \cdot u + \overline{(\varrho u)' u'} ,$$

$$\overline{\varrho u v} = \overline{\varrho u} \cdot v + \overline{(\varrho u)' v'} = \bar{\varrho}\bar{u}v + \overline{\varrho' u'} \cdot v + \overline{(\varrho u)' v'} ;$$

das ergibt

$$\frac{\partial \bar{\varrho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho} \bar{v} \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{\varrho' u'} \cdot \bar{u} - \overline{(\varrho u)' u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{\varrho' u'} \cdot \bar{v} - \overline{(\varrho u)' v'}\right) . \tag{3b}$$

Entsprechend kommt für die Wärmeenergie

$$\frac{\partial \bar{\varrho} \bar{u} \overline{c_p T}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho} \bar{v} \overline{c_p T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\overline{\varrho' u'} \cdot \overline{c_p T} - \overline{(\varrho u)' (c_p T)'}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\overline{\varrho' (c_p T)'} \cdot \bar{v} - \overline{(\varrho c_p T)' v'}\right] . \tag{3c}$$

Vom Standpunkt der im zeitlichen Mittel stationären Strömung aus werden also durch den Mechanismus der turbulenten Vermischung turbulente Ströme der Masse, des Impulses und der Wärme erzeugt.

Wir betrachten nun die Größenordnung der durch die turbulenten Schwankungen induzierten Ströme. Bei der Kontinuitätsgleichung der Masse

$$\frac{\partial(\bar{\varrho}\bar{u} + \overline{\varrho' u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\varrho}\bar{v} + \overline{\varrho' v'})}{\partial y} = 0$$

handelt es sich um die Größenordnung der Glieder $\overline{\varrho' u'}/\bar{\varrho}\bar{u}$ und $\overline{\varrho' v'}/\bar{\varrho}\bar{v}$.

Nach bisherigen Erfahrungswerten, die sich allerdings nur auf mäßige Dichteunterschiede beziehen[1], überschreiten die relativen Schwankungen der Geschwindigkeit in der Hauptbewegungsrichtung $u'/\bar{u}$ kaum die Größenordnung 0,1 und sind gegen 1 vernachlässigbar. Dasselbe gilt für die substantiellen Eigenschaften $\varrho'/\bar{\varrho}$, $T'/\bar{T}$. Dagegen nimmt die relative Schwankung der Quergeschwindigkeit $v'/\bar{v}$ erhebliche Werte an, da hier den kleinen Schwankungen v' die ebenfalls kleine Querkomponente $\bar{v}$ gegenübersteht.

Wir vernachlässigen entsprechend $\overline{\varrho' u'}/\bar{\varrho}\bar{u}$ und erhalten für die Kontinuitätsgleichung der Masse

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho} \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{\varrho' v'}) . \tag{4a}$$

Bei der Impulsgleichung handelt es sich um die Glieder

$$\overline{\varrho' u'}/\bar{\varrho}\bar{u} , \quad \overline{(\varrho u)' u'}/\bar{\varrho}\bar{u}\bar{u} \quad \text{und} \quad \overline{(\varrho u)' v'}/\bar{\varrho}\bar{u}\bar{v} .$$

Wir stellen die Schwankungen des Produktes $(\varrho u)'$ durch die Schwankungen der Faktoren dar:

$$(\varrho u)' \approx \bar{\varrho} u' + \bar{u} \varrho' . \tag{5}$$

Das folgt so:

$$\varrho u = \overline{\varrho u} + (\varrho u)' ,$$

ferner

$$\varrho u = (\bar{\varrho} + \varrho')(\bar{u} + u') = \bar{\varrho}\bar{u} + \bar{\varrho} u' + \bar{u}\varrho' + \varrho' u' ,$$

[1] *H. Reichardt*, Z. angew. Math. Mech. 24 (1944), S. 268.

daher

$$\varrho\,\overline{u} + \overline{(\varrho u)'} = \bar{\varrho}\,\bar{u} + \bar{\varrho}\,\overline{u'} + \bar{u}\,\overline{\varrho'} + \overline{\varrho' u'};$$

hier ist $\overline{\varrho u} = \bar{\varrho}\,\bar{u} + \overline{\varrho' u'}$, so daß wir schließlich erhalten

$$(\varrho u)' = \bar{\varrho}\,u' + u\,\varrho' + \varrho' u' - \overline{\varrho' u'},$$

$$(\varrho u)' \approx \bar{\varrho}\,u' + \bar{u}\,\varrho'.$$

Für $\dfrac{\overline{(\varrho u)' u'}}{\bar{\varrho}\,u\,\bar{u}}$ erhalten wir dann $\dfrac{\overline{u'^2}}{u^2} + \dfrac{\overline{\varrho' u'}}{\bar{\varrho}\,\bar{u}}$,

für $\dfrac{\overline{(\varrho u)' v'}}{\bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{v}}$ ebenso $\dfrac{\overline{u' v'}}{\bar{u}\,\bar{v}} + \dfrac{\overline{\varrho' v'}}{\bar{\varrho}\,\bar{v}}$.

Unter Vernachlässigung der Glieder kleinerer Größenordnung reduziert sich also die Impulsgleichung auf

$$\frac{\partial \bar{\varrho}\,u\,u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{v}\,u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{(\varrho u)' v'}\right). \tag{4b}$$

Entsprechend ergibt sich für die Wärmeenergie

$$\frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{u}\,c_p T}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{v}\,c_p T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{(\varrho c_p T)' v'}\right). \tag{4c}$$

Wir haben damit für den turbulenten Mischungsvorgang in Feldern mit stark veränderlicher Dichte erhalten

$M = -\overline{\varrho' v'}$ für den turbulenten Massenstrom. (6a)

$\tau = -\overline{(\varrho u)' v'}$ mit $(\varrho u)' \approx \varrho u' + u\varrho'$ für die turbulente Schubspannung, (6b)

$Q = -\overline{(\varrho c_p T)' v'}$ mit $(\varrho c_p T)' \approx \varrho (c_p T)' + c_p T \varrho'$ für die turbulente Wärmeleitung. (6c)

Dabei ist zu beachten, daß die hier abgeleiteten turbulenten Austauschgrößen sich auf „Kontinuitätsgleichungen" beziehen, vgl. (4a) bis (4c).

Bei auftretenden Konzentrationsunterschieden einer Beimengung tritt noch $D = -\overline{(\varrho c)' v'}$ (6d) für die turbulente Diffusion hinzu. Diesen turbulenten Austauschgrößen gegenüber sind die molekularen, die wir vernachlässigt haben, meist bedeutend kleiner[1].

3. Die Prandtlsche Hypothese des Mischungsweges. Für Felder mit annähernd konstanter Dichte ϱ hatte *O. Reynolds* auf statistischer Grundlage

$$\tau = -\varrho\,\overline{u' v'}, \qquad Q = -c_p \varrho\,\overline{\vartheta' v'}$$

erhalten. Daneben stand längere Zeit unvermittelt der auf phänomenologischer Grundlage beruhende Ansatz von *Boussinesq*[2]

$$\tau = \varrho\,\varepsilon\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Hier ist ε die sog. scheinbare kinematische Zähigkeit. Das Produkt $\varrho\varepsilon$ wird oft zu einer Größe A_τ, dem sog. Austausch, zusammengefaßt:

$$\tau = A_\tau\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

A_τ hat die Dimension einer Zähigkeit und ist meist um Zehnerpotenzen größer als die laminare Zähigkeit μ.

Entsprechend gilt für die turbulente Wärmeleitung

$$Q = c_p A_Q\,\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y},$$

wo $c_p A_Q$ die sog. turbulente Wärmeleitzahl ist.

Als ein Hauptproblem der Theorie der Turbulenz kann man die Aufgabe bezeichnen, die Schwankungsgrößen durch die zeitlichen Mittelwerte darzustellen. Ein wichtiger Schritt in dieser Richtung erfolgte durch die *Prandtl*sche Hypothese des Mischungsweges[3], die gleichzeitig eine Vermittlung zwischen dem statistischen und phänomenologischen Ansatz schuf. Nach

[1] *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie, S. 338. Karlsruhe 1951.
[2] *Boussinesq*, Théorie de l'écoulement tourbillant. Paris 1897.
[3] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 136.

dieser Hypothese entstehen die Schwankungen aus der Bewegung von Turbulenzballen, die für die Dauer ihrer Eigenexistenz ihre Geschwindigkeit und Temperatur von einer Schicht zur anderen transportieren. In dieser Auffassung ergeben sich die mittleren Schwankungen der Geschwindigkeit in der Hauptströmungsrichtung bzw. der Temperatur als proportional dem Gradienten der Geschwindigkeits- bzw. Temperaturverteilung:

$$\overline{|u'|} = l_1 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| , \qquad \overline{|\vartheta'|} = l_1 \left|\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}\right| . \tag{7}$$

Für $\overline{|v'|}$ wird der plausible Ansatz gemacht

$$\overline{|v'|} \sim \overline{|u'|} . \tag{8}$$

Mit den Korrelationen

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} &= k\,\overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|} \\ \overline{\vartheta' v'} &= k\,\overline{|\vartheta'|} \cdot \overline{|v'|} \end{aligned} \tag{9}$$

erhält man dann unter Beachtung des richtigen Vorzeichens

$$\tau = \varrho l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \text{ für die turbulente Schubspannung}^1, \tag{10a}$$

$$Q = c_p \varrho l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} \text{ für die turbulente Wärmeleitung.} \tag{10b}$$

Die scheinbare kinematische Zähigkeit wird demnach

$$\varepsilon = l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|$$

und der Austausch

$$A_Q = A_\tau = \varrho l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| .$$

In neuerer Zeit hat *Prandtl*[2] für Aufgaben aus dem Gebiet der freien Turbulenz vorgeschlagen, für den Austausch, der nach der obigen Formulierung über dem Querschnitt variiert, einen Mittelwert zu bilden. In der obigen Formulierung hat der Austausch differentiellen Charakter, was an Nullstellen der Ableitung dem Begriff des Mischungsweges nicht äquivalent ist und in gewissen Fällen denn auch den Tatsachen nicht gerecht wird (für die Ausbreitung von Luftstrahlen z. B. wird in Strahlmitte mit $\partial\bar{u}/\partial y$ auch der Austausch gleich Null, was rechnerisch zu unnatürlich zugespitzten Profilen führt). Es wird infolgedessen der über dem Querschnitt konstante Austausch in Vorschlag gebracht, der sich mit dem Mittelwert

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1 b_1(x) \left|\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}\right| \tag{11}$$

ergibt, wobei $b_1(x)$ die Breite der Vermischungszone und $\varkappa_1$ eine empirische Konstante ist. Es ist ersichtlich, daß durch diesen neuen Ansatz auch die Rechnungen erheblich vereinfacht werden.

Wenden wir uns nun dem turbulenten Austausch in Feldern mit stark veränderlicher Dichte zu, so machen wir uns für den Mechanismus der turbulenten Vermischung die *Prandtl*sche Vorstellung des Transportes durch Turbulenzballen zu eigen. Wir tragen jedoch dem Umstand Rechnung, daß die experimentellen Beobachtungen (in Feldern mit annähernd konstanter Dichte) ein ungleiches Übertragungsverhältnis für den Impuls und die substantiellen Eigenschaften anzeigen[3]. Setzen wir nach *Prandtl*

$$\overline{|u'|} = l_1 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| , \tag{12}$$

[1] Es möge bemerkt werden, daß man den *Prandtl*schen Schubspannungsansatz auch in einfacher Weise aus der Hypothese erhält, daß die turbulente Schubspannung bestimmt wird durch den lokalen Verlauf der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}(y)$. Der lokale Verlauf von $\bar{u}(y)$ wird bei hinreichend kleiner Umgebung analytisch festgelegt durch $\frac{d\bar{u}}{dy}$ ($\neq 0$ vorausgesetzt). Der exakte *Reynolds*sche Ausdruck $\tau = -\varrho\overline{u'v'}$ ergibt dann mittels der genannten Hypothese aus dimensionsanalytischen Gründen sofort $\tau = \varrho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}$. Das Vorzeichen erhält man mittels der Bemerkung, daß die durch den Mischungsvorgang erzeugte scheinbare kinematische Zähigkeit > 0 ist. Die Länge l in der Formel ist als geometrische Funktion anzusehen.

[2] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 242.

[3] S. z. B. *L. Prandtl*, Strömungslehre, S. 114. Braunschweig 1949.

so schreiben wir demgemäß

$$|\varrho'| = El_1 \left|\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right| , \qquad |T'| = El_1 \left|\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right| . \tag{13}$$

Bezüglich der Querbewegung nehmen wir wieder an

$$|\overline{v'}| \sim |\overline{u'}| \qquad (|\overline{v'}| = k_2 |\overline{u'}|) . \tag{14}$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} |\overline{\varrho' v'}| &= k\,|\overline{\varrho'}|\,|\overline{v'}| , \\ |\overline{u' v'}| &= k\,|\overline{u'}|\,|\overline{v'}| , \\ |\overline{(c_p T)' v'}| &= k\,|\overline{(c_p T)'}|\,|\overline{v'}| . \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Der Korrelationskoeffizient k ist dabei für alle Formen des turbulenten Austausches derselbe. Dies ergibt sich daraus, daß der Austausch für alle Formen an den Transport durch denselben Träger gebunden ist. Für den turbulenten Massenstrom z. B. erhält man, wenn L bzw. EL den momentanen Mischungsweg bedeutet,

$$|\overline{\varrho' v'}| = \left|\overline{EL \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} v'}\right| = \left|\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right| |\overline{EL v'}| .$$

Mit der Korrelation $|\overline{Lv'}| = k\,|\overline{L}| \cdot |\overline{v'}|$ erhält man

$$|\overline{\varrho' v'}| = \left|\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right| k E |\overline{L}|\,|\overline{v'}| = k |\overline{\varrho'}|\,|\overline{v'}| .$$

Entsprechend ergeben sich die anderen Korrelationen. Der gemeinsame Korrelationskoeffizient ist also definiert durch

$$|\overline{Lv'}| = k\,|\overline{L}|\,|\overline{v'}| . \tag{16}$$

Mit den Ansätzen (12), (13) und den Korrelationen (14), (15) erhalten wir

a) für den turbulenten Massenstrom

$$\begin{aligned} M = -\overline{\varrho' v'} &= \pm k\,|\overline{\varrho'}|\,|\overline{v'}| = \pm k k_2 |\overline{\varrho'}|\,|\overline{u'}| \\ &= \pm k k_2 E l_1^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \left|\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right| = \pm k k_2 E l_1^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \\ &= \pm E l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \qquad (k k_2 l_1^2 = l^2) . \end{aligned}$$

Offenbar ist das Vorzeichen von $-\overline{\varrho' v'}$ identisch mit dem von $\partial\bar{\varrho}/\partial y$; denn bei positivem v' z. B. ist ϱ' positiv für negatives $\partial\bar{\varrho}/\partial y$ und umgekehrt. Das gibt

$$M = E l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} .$$

b) für die turbulente Schubspannnung[1]

$$\begin{aligned} \tau = -\overline{(\varrho u)' v'} &= -\overline{(\bar{\varrho} u' + \bar{u} \varrho') v'} = -\bar{\varrho}\,\overline{u' v'} - \bar{u}\,\overline{\varrho' v'} \\ &= \pm \bar{\varrho} k |\overline{u'}|\,|\overline{v'}| \pm \bar{u} k |\overline{\varrho'}|\,|\overline{v'}| = \pm \bar{\varrho} k k_2 |\overline{u'}|\,|\overline{u'}| \pm \bar{u} k k_2 |\overline{\varrho'}|\,|\overline{u'}| \\ &= \pm \bar{\varrho} k k_2 l_1^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|^2 \pm \bar{u} k k_2 E l_1^2 \left|\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right| \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| = \pm \bar{\varrho} k k_2 l_1^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 \pm \bar{u} k k_2 E l_1^2 \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ &= \pm \bar{\varrho} l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 \pm \bar{u} E l^2 \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} . \end{aligned}$$

[1] Auch hier ergeben sich die Ansätze für den turbulenten Austausch in einfacher Weise aus der Hypothese, daß der turbulente Austausch bestimmt wird durch den lokalen Verlauf der mittleren Verteilungen. Betrachten wir beispielsweise die verallgemeinerte *Reynolds*sche Formel $\tau = -(\bar{\varrho}\,\overline{u' v'} + \bar{u}\,\overline{\varrho' v'})$ für die turbulente Schubspannung. Der lokale Verlauf der mittleren Verteilungen wird hier festgelegt durch $\frac{d\bar{u}}{dy}$ und $\frac{d\bar{\varrho}}{dy}$. Die obige Hypothese liefert dann aus dimensionsanalytischen Gründen sofort $-\bar{\varrho}\,\overline{u' v'} = \bar{\varrho} l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}$ und $-\bar{u}\,\overline{\varrho' v'} = \bar{u} l_*^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{\varrho}}{dy}$, was mit $\frac{l_*^2}{l^2} = E$ auf $\tau = l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \left(\bar{\varrho} \frac{d\bar{u}}{dy} + E \bar{u} \frac{d\bar{\varrho}}{dy}\right|$ führt.

Das Vorzeichen von $-\overline{u'v'}$ ist identisch mit dem von $\partial u/\partial y$; das von $-\overline{\varrho' v'}$ mit dem von $\partial \bar{\varrho}/\partial y$. Das gibt

$$\tau = l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \left(\bar{\varrho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + E\,\bar{u}\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right).$$

c) für die turbulente Wärmeleitung

$$Q = E l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p T}}{\partial y},$$

entsprechend bei etwaigen Konzentrationsunterschieden einer Beimengung für die turbulente Diffusion

$$D = E l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c}}{\partial y}.$$

Der Mischungsvorgang in Feldern mit stark veränderlicher Dichte wird also durch folgende Austauschgrößen beschrieben:

$$M = E l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}, \tag{17a}$$

$$\tau = l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \left(\bar{\varrho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + E\,u\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right). \tag{17b}$$

$$Q = E l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p T}}{\partial y}, \tag{17c}$$

$$D = E l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c}}{\partial y}. \tag{17d}$$

Für kleine Dichteunterschiede bzw. $\bar{\varrho} \approx$ konst. erhält man wieder die bekannten Formeln

$$\tau = \bar{\varrho}\, l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial u}{\partial y}$$

und (abgesehen vom Faktor E)

$$Q = E c_p \bar{\varrho}\, l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}.$$

Bei größeren Dichteunterschieden sind also die Zusatzglieder

$$E l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \bar{u}\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \qquad \text{für die turbulente Schubspannung,}$$

und

$$E l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \overline{c_p T}\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y} \qquad \text{für die turbulente Wärmeleitung}$$

zu berücksichtigen.

Die oben abgeleiteten turbulenten Austauschgrößen beziehen sich, wie noch einmal hervorgehoben werden soll, auf „Kontinuitätsgleichungen", vgl. (4a) bis (4c).

4. Zusammenfassung. Die statistische Betrachtungsweise nach *O. Reynolds* wird auf Felder mit stark veränderlicher Dichte verallgemeinert. Auf der Grundlage der *Prandtl*schen Konzeption des Mischungsweges wird dann ein Gleichungssystem zur Berechnung der Mischungsvorgänge aufgestellt.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Jägerstraße 22/23.

Turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahle von fast gleicher Geschwindigkeit und stark unterschiedlicher Temperatur.

Von W. Szablewski.

1. Feldgleichungen für die turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahle stark unterschiedlicher Temperatur. Wir setzen im folgenden den Druck als konstant voraus. Nach Gleichung (17) der vorangehenden Arbeit des Verfassers wird dann ein ebenes turbulentes Mischungsfeld mit der Hauptströmungsrichtung x durch folgendes Gleichungssystem beschrieben:

$$\text{Impuls:}\quad \frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{v}}{\partial y}=\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\varrho}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+E\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\text{Energie:}\quad \frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p T}\,\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p T}\,\bar{v}}{\partial y}=E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial^2 \bar{\varrho}\,\overline{c_p T}}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\text{Masse:}\quad \frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\varrho}\,\bar{v}}{\partial y}=E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial^2 \bar{\varrho}}{\partial y^2}. \tag{3}$$

(Hierbei bedeuten x die Hauptströmungsrichtung, y die Querachse, u und v die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung, ϱ die Dichte, T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, E eine empirische Zahl (Übertragungsverhältnis von substantiellen Eigenschaften und Geschwindigkeit beim turbulenten Austausch). Das Überstreichen deutet an, daß es sich um die zeitlichen Mittelwerte einer stationären turbulenten Strömung handelt. Im folgenden werden die Querstriche fortgelassen.) Dabei haben wir, einem Vorschlag von *L. Prandtl*[1] gemäß, die scheinbare kinematische Zähigkeit $\varepsilon = l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ durch die Mittelwertbildung

$$\varepsilon(x)=\varkappa_1 b_1(x)\,(u_0-u_1) \qquad (u_0>u_1) \tag{4}$$

ersetzt, wo $b_1(x)$ die Mischbreite des Feldes der Geschwindigkeit, $\varkappa_1$ eine dimensionslose empirische Konstante[2], u_0 und u_1 die Geschwindigkeiten der ungestörten Strahle 0 und 1 bedeuten (Abb. 1).

Die Größe c_p wird als Konstante behandelt. Wir führen noch die Übertemperatur

$$\vartheta = T - T_1$$

ein und erhalten dann für (2), wenn wir (3) berücksichtigen,

$$\frac{\partial \varrho\,u\,\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial \varrho\,v\,\vartheta}{\partial y}=E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial^2 \varrho\,\vartheta}{\partial y^2}. \tag{2'}$$

Mittels (3) können wir unser Gleichungssystem (1), (2'), (3) auch schreiben

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(E+1)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial \varrho/\partial y}{\varrho}\right], \tag{5}$$

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=E\,\varepsilon(x)\left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}+2\,\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\,\frac{\partial \varrho/\partial y}{\varrho}\right], \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varrho\,u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho\,v}{\partial y}=E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}. \tag{7}$$

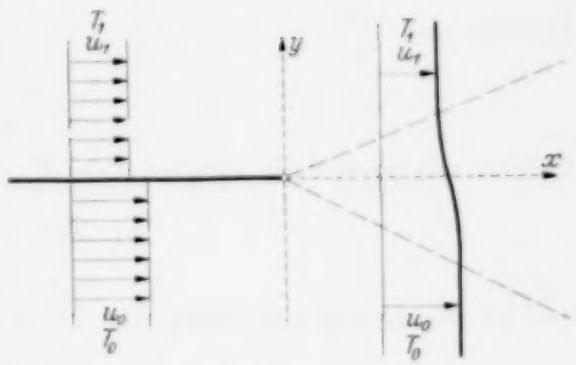

Abb. 1.

Mit der Zustandsgleichung für ideale Gase bei konstantem Druck

$$\varrho\,T=\text{konst.} \tag{8}$$

ersetzen wir ϱ durch ϑ:

$$\varrho=\frac{\text{konst.}}{T}=\frac{\text{konst.}}{T_1}\cdot\frac{1}{1+\vartheta/T_1} \tag{9}$$

[1] *L. Prandtl*, Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 242.

[2] Der empirische Koeffizient $\varkappa_1$ wird für das Phänomen der Vermischung ebener Luftstrahle als Konstante angesehen. Unter der Voraussetzung, daß $\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{mittel}$ nur wenig variiert, deckt sich die obige Annahme mit der Hypothese, daß l/b_1 für diesen Erscheinungsbereich eine Konstante ist.

und erhalten dann

$$\text{Impuls:}\quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-(E+1)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\vartheta/T_1}{\partial y}{1+\vartheta/T_1}\right]; \tag{10}$$

$$\text{Energie:}\quad u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=E\,\varepsilon(x)\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}-2\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta/T_1}{\partial y}{1+\vartheta/T_1}\right]. \tag{11}$$

Für die Masse ergibt sich zunächst aus (7)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\quad\frac{1}{1+\vartheta/T_1}\left\{u\frac{\partial\vartheta/T_1}{\partial x}+v\frac{\partial\vartheta/T_1}{\partial y}+E\,\varepsilon(x)\left[2\frac{\left(\frac{\partial\vartheta/T_1}{\partial y}\right)^2}{1+\vartheta/T_1}-\frac{\partial^2\vartheta/T_1}{\partial y^2}\right]\right\}.$$

Hier ist aber nach (11) die rechte Seite der Gleichung identisch Null, so daß wir erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,. \tag{12}$$

Infolge des Fehlens einer kennzeichnenden Länge ist es naheliegend, Affinität der Profile über der Mischbreite anzunehmen. Aus dimensionsanalytischen Gründen ergibt sich dann für die Mischbreiten

$$b_1\sim x,\qquad b_2\sim x\,, \tag{13}$$

wo b_2 die Mischbreite des Temperaturfeldes ist. Wir transformieren auf die Ähnlichkeitskoordinate

$$\left.\begin{aligned}&\eta=\frac{y}{x}\\ &\text{mit}\\ &\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y=-\frac{\eta}{x}\frac{d}{d\eta},\qquad\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x=\frac{1}{x}\frac{d}{d\eta}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Das gibt, wenn wir gleichzeitig mit u_0, $\vartheta_0(=T_0-T_1)$ dimensionslos machen,

$$\text{Impuls:}\quad\frac{d^2u/u_0}{d\eta^2}+\frac{du/u_0}{d\eta}\left[\left(\frac{u}{u_0}\eta-\frac{v}{u_0}\right)\frac{x}{\varepsilon_1(x)}-(E+1)\frac{d\vartheta/T_1}{d\eta}{1+\vartheta/T_1}\right]=0\,, \tag{15}$$

$$\text{Energie:}\quad\frac{d^2\vartheta/\vartheta_0}{d\eta^2}+\frac{d\vartheta/\vartheta_0}{d\eta}\left[\frac{1}{E}\left(\frac{u}{u_0}\eta-\frac{v}{u_0}\right)\frac{x}{\varepsilon_1(x)}-2\frac{d\vartheta/T_1}{d\eta}{1+\vartheta/T_1}\right]=0\,, \tag{16}$$

$$\text{Masse:}\quad-\eta\frac{du/u_0}{d\eta}+\frac{dv/u_0}{d\eta}=0\,. \tag{17}$$

Hier ist mit $\frac{b_1(x)}{x}=c_1$ nach (13)

$$\frac{\varepsilon_1(x)}{x}=\varkappa_1 c_1\frac{u_0-u_1}{u_0}\,.$$

Führen wir nach dem Vorbild von *H. Görtler*[1] in die Impuls- und Massegleichung die Variable

$$\sigma\eta\ \text{ mit }\ \sigma^2=\frac{1}{2\varkappa_1 c_1\frac{u_0-u_1}{u_0}}=\frac{1}{2}\frac{x}{\varepsilon_1(x)} \tag{18}$$

und in die Energiegleichung die Variable

$$\sigma_*\eta\ \text{ mit }\ \sigma_*^2=\frac{1}{E}\frac{1}{2\varkappa_1 c_1\frac{u_0-u_1}{u_0}} \tag{19}$$

ein, so lautet unser Gleichungssystem schließlich

$$\text{Impuls:}\quad\frac{d^2u/u_0}{d(\sigma\eta)^2}+\frac{du/u_0}{d\sigma\eta}\left[2\left(\frac{u}{u_0}\sigma\eta-\sigma\frac{v}{u_0}\right)-\underline{\frac{E+1}{1+\vartheta/T_1}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma\eta}}\right]=0\,, \tag{20}$$

$$\text{Energie:}\quad\frac{d^2\vartheta/\vartheta_0}{d(\sigma_*\eta)^2}+\frac{d\vartheta/\vartheta_0}{d\sigma_*\eta}\left[2\left(\frac{u}{u_0}\sigma_*\eta-\sigma_*\frac{v}{u_0}\right)-\underline{\frac{2}{1+\vartheta/T_1}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma_*\eta}}\right]=0\,, \tag{21}$$

$$\text{Masse:}\quad-\sigma\eta\frac{du/u_0}{d\sigma\eta}+\frac{d\sigma v/u_0}{d\sigma\eta}=0\,. \tag{22}$$

[1] *H. Görtler*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 244.

Das sind die Gleichungen, welche die turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahle stark unterschiedlicher Temperatur beschreiben. Gegenüber dem Feld konstanter Dichte treten in den Differentialgleichungen die unterstrichenen Glieder zusätzlich auf.

2. Berechnung des Mischfeldes für den Fall $(u_0-u_1)/u_0 \ll 1$. Wir beschränken uns im folgenden auf die Behandlung des Falles, daß, bei beliebig großen Temperaturunterschieden, die Strahle fast gleiche Geschwindigkeit besitzen:

$$\frac{u_0-u_1}{u_0} \approx 0 \,. \tag{23}$$

Offenbar können wir dann in den Gleichungen (20) und (21)

$$\frac{u}{u_0}\,\eta - \frac{v}{u_0} \approx \eta \tag{24}$$

setzen. Denn mit $(u_0-u_1)/u_0 \to 0$ strebt nach (4) auch die scheinbare kinematische Zähigkeit $\varepsilon \to 0$. (Zu denselben Gleichungen gelangt man, wenn man für u/u_0, v/u_0 und ϑ/ϑ_0 einen nach Potenzen von $(u_0-u_1)/u_0$ fortschreitenden Reihenansatz macht und die höheren Potenzen von $(u_0-u_1)/u_0$ vernachlässigt.)

Wir erhalten dann das vereinfachte Gleichungssystem

$$\text{Impuls:}\quad \frac{d^2u/u_0}{d(\sigma\eta)^2} + \frac{du/u_0}{d\sigma\eta}\left[2\sigma\eta - \underline{\frac{(E+1)\;d\vartheta/T_1}{1+\vartheta/T_1\;\;d\sigma\eta}}\right] = 0 \,, \tag{25}$$

$$\text{Energie:}\quad \frac{d^2\vartheta/\vartheta_0}{d(\sigma_*\eta)^2} + \frac{d\vartheta/\vartheta_0}{d\sigma_*\eta}\left[2\sigma_*\eta - \underline{\frac{2}{1+\vartheta/T_1}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma_*\eta}}\right] = 0 \,, \tag{26}$$

$$\text{Masse:}\quad -\sigma\eta\frac{du/u_0}{d\sigma\eta} + \frac{d\sigma v/u_0}{d\sigma\eta} = 0 \,. \tag{27}$$

Die Integration dieses Gleichungssystems läßt sich bis auf Quadraturen durchführen.

Für die Temperaturverteilung ϑ/ϑ_0 mit den Randbedingungen

$$\vartheta/\vartheta_0 \to \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} \text{ für } \sigma_*\eta \to \begin{vmatrix}-\infty\\ \infty\end{vmatrix}$$

erhält man aus (26)

$$\vartheta/\vartheta_0 = \frac{1}{\vartheta_0/T_1}\left[\frac{1}{\alpha\Phi(\sigma_*\eta)+\beta} - 1\right]$$

mit der Fehlerintegralfunktion

$$\Phi(\sigma_*\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sigma_*\eta} e^{-(\sigma_*\eta)^2}\, d\sigma_*\eta \tag{28}$$

und den Integrationskonstanten

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_0/T_1}{1+\vartheta_0/T_1}\,, \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\right).$$

Führen wir in (25) zweckmäßigerweise die Variable $\sigma_*\eta$ statt $\sigma\eta$ ein, so kommt

$$\frac{\dfrac{d^2u/u_0}{d(\sigma_*\eta)^2}}{\dfrac{du/u_0}{d\sigma_*\eta}} - \frac{(E+1)}{1+\vartheta/T_1}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma_*\eta} + 2E\,\sigma_*\eta = 0 \tag{29}$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{u-u_1}{u_0-u_1} \to \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} \text{ für } \sigma_*\eta \to \begin{vmatrix}-\infty\\ \infty\end{vmatrix}.$$

Man erhält

$$\frac{u-u_1}{u_0-u_1} = \gamma\int_0^{\sigma_*\eta} \frac{e^{-E(\sigma_*\eta)^2}}{(\alpha\Phi(\sigma_*\eta)+\beta)^{E+1}}\, d\sigma_*\eta + \delta \tag{30}$$

mit den Konstanten

$$\gamma = \frac{1}{\int_0^{-\infty} - \int_0^{\infty}}\,, \qquad \delta = \frac{\int_0^{\infty}}{\int_0^{\infty} - \int_0^{-\infty}}\,.$$

und schließlich die Querkomponente

$$\frac{\dfrac{\sigma_* v/u_0}{u_0-u_1}}{u_0} = \gamma' \int_0^{\sigma_* \eta} \frac{e^{-E(\sigma_* \eta)^2} \cdot \sigma_* \eta}{(\varkappa \Phi(\sigma_* \eta)+\beta)^{E+1}}\, d\sigma_* \eta + \text{konst}. \tag{31}$$

Die Integrationskonstante in (31) könnte man nach einer Bemerkung von *v. Kármán*[1] aus der Gleichung

$$\varrho_0 u_0 v_0 + \varrho_1 u_1 v_1 = 0$$

(v_0 bzw. v_1 asymptotischer Betrag der Querkomponente des Strahls 0 bzw. 1 im Mischfeld) ermitteln, die besagt, daß der Impuls in der Hauptströmungsrichtung infolge des Fehlens äußerer Kräfte keine Änderung erfährt.

Eine andere Bestimmungsgleichung ergibt sich auf Grund folgender Bemerkung: Bei der Ausbreitung eines aus einer Düse tretenden Luftstrahls in bewegter Luft tritt das Phänomen der Vermischung zweier ebener Luftstrahle in unmittelbarer Nähe des Düsenrandes auf. In dem durch die Vermischung noch nicht berührten Teil des Düsenstrahls, dem Strahlkern, ist das Verschwinden der Querkomponente anzunehmen. Legen wir dem Düsenstrahl die Anfangsdaten u_0, T_0 bei, so haben wir damit die Randbedingung

$$\frac{\dfrac{\sigma_* v/u_0}{u_0-u_1}}{u_0} \to 0 \quad \text{für} \quad \sigma_* \eta \to -\infty . \tag{33}$$

In Hinsicht auf spätere Untersuchungen über die Ausbreitung von Heißluftstrahlen legen wir (33) der weiteren Rechnung zugrunde. Das gibt

$$\frac{\dfrac{\sigma_* v/u_0}{u_0-u_1}}{u_0} = \gamma' \left| \int_0^{\sigma_* \eta} \frac{e^{-E(\sigma_* \eta)^2} \cdot \sigma_* \eta}{(\varkappa \Phi(\sigma_* \eta)+\beta)^{E+1}}\, d\sigma_* \eta - \int_0^{-\infty} \right| . \tag{34}$$

Für kleinere $\vartheta_0/T_1 \approx 0$ vereinfachen sich die Formeln (28), (30) und (34) erheblich:

$$\vartheta/\vartheta_0 = -\frac{1}{2}\Phi(\sigma_* \eta) + \frac{1}{2} . \tag{35}$$

$$\frac{u-u_1}{u_0-u_1} = -\frac{1}{2}\Phi(\sigma \eta) + \frac{1}{2} . \tag{36}$$

Die Verteilungen der Temperatur und Geschwindigkeit werden hier durch die Fehlerintegralfunktion dargestellt. Da nach (19) die Streckungsfaktoren σ und σ_* im Verhältnis $\frac{\sigma}{\sigma^*} = \sqrt{E}$ stehen, so ergibt sich das Mischbreitenverhältnis

$$\frac{b_2}{b_1} = \sqrt{E} . \tag{37}$$

Die Querkomponente wird hier

$$\frac{\dfrac{\sigma v/u_0}{u_0-u_1}}{u_0} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(\sigma \eta)^2} . \tag{38}$$

Zur vollständigen Festlegung des Strömungsfeldes ist noch die Bestimmung der Streckungsfaktoren σ und σ_* erforderlich. Das kann so geschehen: Aus der berechneten Geschwindigkeitsverteilung (30) läßt sich offenbar $\sigma_* c_1$ ablesen (wo nach (13) $c_1 = b_1/x$ ist). Es folgt dann aus (19)

$$\sigma_* = \frac{1}{E}\,\frac{1}{2\varkappa_1 \sigma_* c_1 \dfrac{u_0-u_1}{u_0}} . \tag{39}$$

Hier tritt der Faktor $\varkappa_1$ auf. Dieser stellt einen empirischen Koeffizienten der Theorie dar und ist aus Messungen zu ermitteln. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter darauf ein. Es verbleibt noch der empirische Faktor E, der das Übertragungsverhältnis von substantiellen Eigenschaften und Geschwindigkeit beim turbulenten Austausch angibt[2]. Nach *L. Prandtl*[3] setzen wir $E = 2$.

[1] *A. Kuethe*, Journ. appl. Mech. 2 (1935), S. 87.
[2] Vgl. *W. Szablewski*, vorangehende Arbeit.
[3] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre, S. 114. Braunschweig 1949.

Tabelle 1.

$\frac{u - u_1}{u_0 - u_1}$

$\sigma_* \eta$	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	5	10	$\sigma_* \eta$	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	5	10
0	0,500	0,304	0,215	0,107	0,055						
0,2	0,345	0,185	0,123	0,057	0,028	—0,2	0,655	0,452	0,343	0,188	0,102
0,4	0,212	0,102	0,065	0,028	0,014	—0,4	0,788	0,611	0,500	0,307	0,181
0,6	0,115	0,050	0,031	0,013	0,006	—0,6	0,885	0,756	0,663	0,463	0,300
0,8	0,055	0,022	0,013	0,005	0,003	—0,8	0,945	0,866	0,805	0,636	0,460
1,0	0,023	0,009	0,005	0,002	0,001	—1,0	0,977	0,944	0,905	0,794	0,643
1,2	0,008	0,003	0,002	0,001	0	—1,2	0,992	0,978	0,962	0,905	0,807
1,4	0,003	0,001	0,001	0		—1,4	0,997	0,993	0,987	0,964	0,918
1,6	0,001	0	0			—1,6	0,999	0,998	0,996	0,989	0,972
1,8	0					—1,8	1	0,999	0,999	0,997	0,992
2,0						—2,0		1	1	0,999	0,999
2,2						—2,2				1	1
2,4						—2,4					
2,6						—2,6					
2,8						—2,8					
3,0						—3,0					

ϑ/ϑ_0

$\sigma_* \eta$	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	5	10	$\sigma_* \eta$	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	5	10
0	0,500	0,333	0,250	0,143	0,083						
0,2	0,389	0,241	0,175	0,096	0,055	—0,2	0,611	0,440	0,344	0,208	0,125
0,4	0,286	0,167	0,118	0,064	0,035	—0,4	0,714	0,555	0,454	0,294	0,185
0,6	0,198	0,110	0,076	0,040	0,022	—0,6	0,802	0,669	0,574	0,403	0,269
0,8	0,129	0,069	0,047	0,024	0,013	—0,8	0,871	0,772	0,692	0,530	0,380
1,0	0,079	0,041	0,028	0,014	0,008	—1,0	0,921	0,859	0,796	0,661	0,516
1,2	0,045	0,023	0,015	0,008	0,004	—1,2	0,955	0,919	0,876	0,780	0,659
1,4	0,024	0,012	0,008	0,004	0,002	—1,4	0,976	0,953	0,932	0,872	0,788
1,6	0,012	0,006	0,004	0,002	0,001	—1,6	0,987	0,977	0,961	0,933	0,884
1,8	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	—1,8	0,995	0,989	0,985	0,968	0,943
2,0	0,002	0,001	0,001	0	0	—2,0	0,998	0,995	0,993	0,986	0,975
2,2	0,001	0	0			—2,2	0,999	0,998	0,997	0,994	0,990
2,4	0					—2,4	1	0,999	0,999	0,998	0,996
2,6						—2,6		1	1	0,999	0,999
2,8						—2,8				1	1
3,0						—3,0					

$\frac{\sigma_* v'/u_*}{\frac{u_0 - u_1}{u_0}}$

$\sigma_* \eta$	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	5	10	$\sigma_* \eta$	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	5	10
0	0,200	0,339	0,444	0,643	0,815						
0,2	0,184	0,329	0,436	0,638	0,812	—0,2	0,184	0,324	0,431	0,630	0,811
0,4	0,145	0,304	0,419	0,630	0,808	—0,4	0,145	0,276	0,384	0,594	0,787
0,6	0,097	0,279	0,402	0,622	0,804	—0,6	0,097	0,204	0,302	0,516	0,727
0,8	0,055	0,259	0,390	0,617	0,802	—0,8	0,055	0,128	0,203	0,394	0,614
1,0	0,027	0,247	0,383	0,614	0,800	—1,0	0,027	0,067	0,114	0,253	0,450
1,2	0,011	0,241	0,379	0,613	0,800	—1,2	0,011	0,030	0,053	0,132	0,269
1,4	0,004	0,238	0,378	0,612	0,800	—1,4	0,004	0,011	0,020	0,055	0,127
1,6	0,001	0,237	0,377	0,612	0,799	—1,6	0,001	0,003	0,006	0,018	0,046
1,8	0	0,237	0,377	0,612	0,799	—1,8	0	0,001	0,002	0,005	0,013
2,0		0,237	0,377	0,612	0,799	—2,0		0	0	0,001	0,003
2,2						—2,2				0	0
2,4						—2,4					
2,6						—2,6					
2,8						—2,8					
3,0						—3,0					

Derselbe Wert ergibt sich auch aus den Messungen von *O. Pabst*[1] an Heißluftstrahlen, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll.

[1] *O. Pabst*, U. u. M. 8004 (1944) und U. u. M. 8007 (1944).

An Hand der Formeln (28), (30) und (34) haben wir die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen für die Parameterwerte $\vartheta_0/T_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10$ berechnet. Die vorkommenden Integrale wurden dabei approximativ berechnet.

In Abb. 2 bis 4 haben wir die Verteilungsfunktionen über $\sigma_* \eta_j$ aufgetragen. Die in Abb. 2 und 3 gestrichelt eingetragene Kurve verläuft parallel zur Verteilungskurve für $\vartheta_0/T_1 \approx 0$, die nach (35) und (36) durch die Fehlerintegralfunktion dargestellt wird. Man sieht, daß die bei größeren Dichteunterschieden auftretenden Verteilungen nur wenig von der Fehlerintegralfunktion abweichen. Abb. 4 zeigt den Verlauf der Querkomponente der Geschwindigkeit. Entsprechend dem Umstand, daß wir im Mischungsraum bei fast gleicher Geschwindigkeit eine geringere Dichte haben als im Strahl 1, tritt in diesem ein Abstrom vom Mischungsraum weg auf.

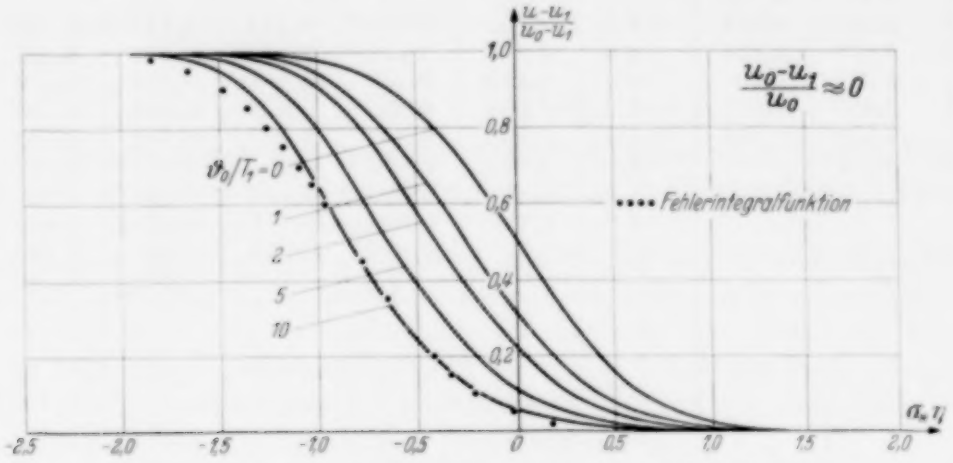

Abb. 2. Verteilung der Längskomponente der Geschwindigkeit.

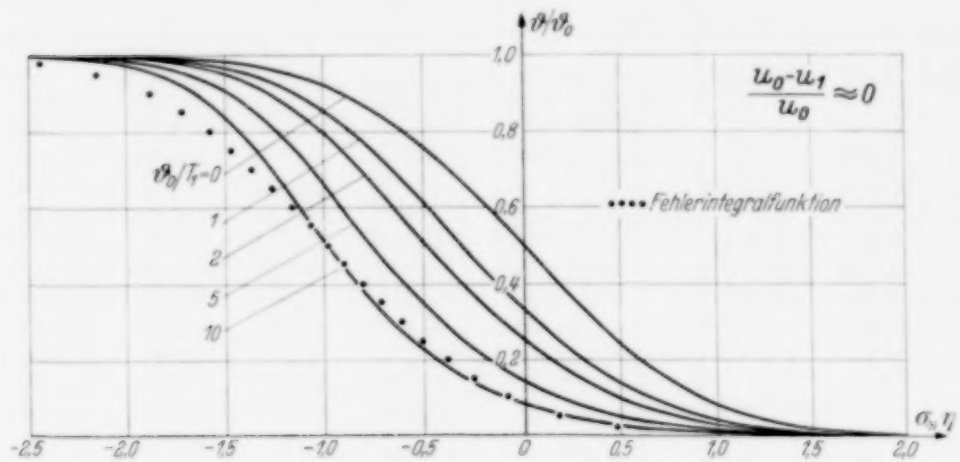

Abb. 3. Temperaturverteilung.

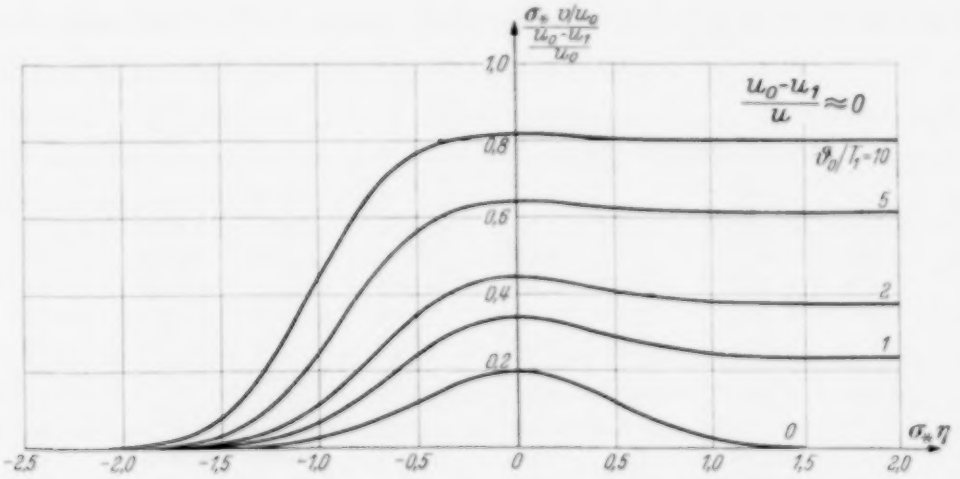

Abb. 4. Verteilung der Querkomponente der Geschwindigkeit.

Es zeigt sich demnach aus Abb. 2 und 3, daß die Mischbreiten sich nur wenig mit dem Dichteunterschied ändern[1]. Dagegen tritt, wie aus den Abbildungen ersichtlich, folgender charakteristischer Effekt auf: Während bei $\vartheta_0/T_1 \approx 0$ der Winkelraum der Mischzone symmetrisch zur x—Achse, also symmetrisch zu beiden Strahlen, gelegen ist, dreht er sich mit wachsendem Temperaturunterschied in markanter Weise zum heißeren Strahl hin. Man kann auch sagen, daß bei der Ausbreitung von Heißluftstrahlen (die aus einer Düse treten) in Luft von fast gleicher Geschwindigkeit der Innenwinkel der Mischzone mit der Temperaturdifferenz wächst, während der Außenwinkel kleiner wird. Wir haben diese Verhältnisse noch besonders in Abb. 5 dargestellt, welche die Winkelräume der Mischzonen für das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld zeigt. Die Grenzen der Mischzonen wurden dabei durch $(u-u_1)/u_0$ bzw. ϑ/ϑ_0 gleich 0,99 und 0,01 festgelegt.

Aus dem geschilderten Verhalten kann man den Schluß ziehen, daß bei der turbulenten Ausbreitung von Heißluftstrahlen in Luft von fast gleicher Geschwindigkeit $((u_0-u_1)/u_0 \approx 0)$ heißere

[1] Es ergibt sich zunächst aus den Abb. 1 und 2, daß $\sigma_* c_1$ sich nur wenig mit dem Dichtenunterschied ändert. Nach (39) trifft diese Feststellung dann auch für σ_* und damit nach (19) auch für $c_1 = b_1/x$ zu.

Strahle eine kürzere Reichweite (gemessen durch die Länge des Strahlkerns) haben werden. Man kann annehmen, daß dieser Effekt ganz allgemein (für beliebiges $(u_0-u_1)/u_0$) bei der Ausbreitung von Heißluftstrahlen in bewegter Luft in Erscheinung treten wird. Diese Vermutung findet sich durch die Messungen von *O. Pabst*[1] bestätigt, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll.

3. Prüfung der Annahme konstanten Drucks. Wir haben unsere Rechnungen unter der Annahme konstanten Drucks durchgeführt. Nach dem Vorgang von *W. Tollmien*[2] wollen wir diese Annahme an Hand der zweiten Bewegungsgleichung nachprüfen.

a) Die Bewegungsgleichung in der Querrichtung lautet

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho v u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \\ &\text{wo} \\ &\tau=\varepsilon(x)\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial y}+E u\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) \end{aligned}\right| \qquad (40)$$

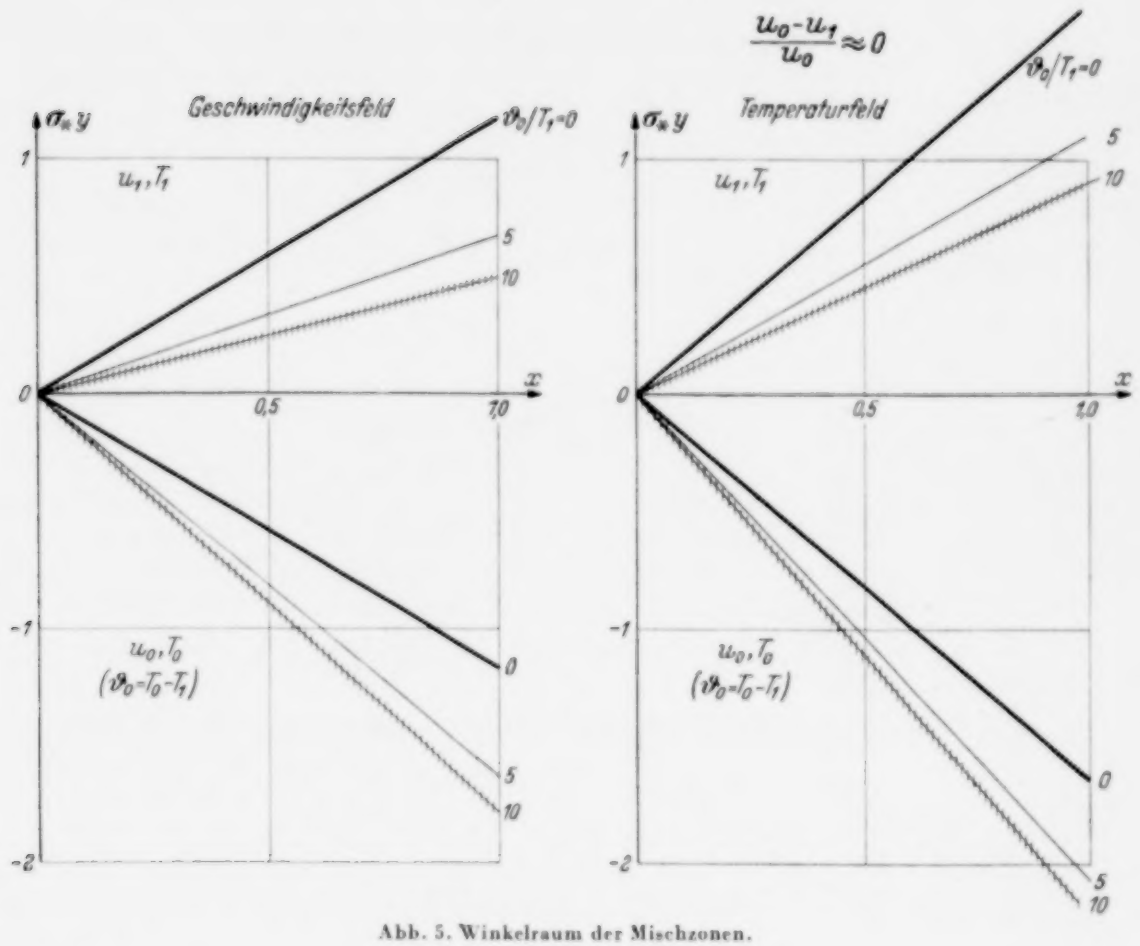

Abb. 5. Winkelraum der Mischzonen.

und σ_y die scheinbare Druckspannung in der y-Richtung ist. Beachtet man (7), so können wir (40) auch schreiben

$$\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon(x)\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial y}+E u\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)\right]-E\,\varepsilon(x)\,v\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}. \qquad (41)$$

Transformiert man auf $\eta=y/x$ (s. (14)) und macht dimensionslos, so wird

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{dv/u_0}{d\eta}\left(\frac{u}{u_0}\eta-\frac{v}{u_0}\right)=&-\frac{1}{\varrho_0 u_0^2}\frac{dp}{d\eta}-\frac{\eta}{2\sigma^2}\left[\frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{d^2u/u_0}{d\eta^2}+(E+1)\frac{d\varrho/\varrho_0}{d\eta}\frac{du/u_0}{d\eta}+E\frac{u}{u_0}\frac{d^2\varrho/\varrho_0}{d\eta^2}\right] \\ &-\frac{E}{2\sigma^2}\frac{v}{u_0}\frac{d^2\varrho/\varrho_0}{d\eta^2}+\frac{1}{\varrho_0 u_0^2}\frac{d\sigma_\eta}{d\eta}. \end{aligned}\right| \qquad (42)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung nach (9) ϱ durch ϑ, eliminiert die erste Ableitung von v/u_0 mittels (22) und die zweiten Ableitungen von u/u_0 bzw. ϑ/ϑ_0 mittels (20) bzw. (21), so erhält man

[1] *O. Pabst*, a. a. O.
[2] *W. Tollmien*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 468.

bei Einführung der Variablen $\sigma_* \eta$ ($\sigma^2 = E\sigma_*^2$) schließlich

$$\frac{1}{4}\frac{\sigma_*^2}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\frac{dp}{d\sigma_*\eta} = \frac{\sigma_*\eta}{1+\vartheta/T_1}\frac{du/u_0}{d\sigma_*\eta}\left(\frac{u}{u_0}\sigma_*\eta - \sigma_*\frac{v}{u_0}\right) \Bigg| \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\vartheta/T_1)^2}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma_*\eta}\left[\left(\frac{u}{u_0}\sigma_*\eta\right)^2 - \left(\sigma_*\frac{v}{u_0}\right)^2\right] + \frac{1}{4}\frac{\sigma_*^2}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\frac{d\sigma_\eta}{d\sigma_*\eta}. \Bigg| \tag{43}$$

wo nach (18) $\sigma_* = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{1}{\sqrt{2\varkappa_1 c_1\dfrac{u_0-u_1}{u_0}}}$ ist.

b) Beschränken wir die Betrachtung auf Strahle fast gleicher Geschwindigkeit, so haben wir nach (42)

$$\frac{u}{u_0}\sigma_*\eta - \sigma_*\frac{v}{u_0} \approx \sigma_*\eta\,.$$

Damit vereinfacht sich (43) zu

$$\frac{1}{4}\frac{\sigma_*^2}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\frac{dp}{d\sigma_*\eta} = \frac{(\sigma_*\eta)^2}{1+\vartheta/T_1}\frac{du/u_0}{d\sigma_*\eta} - \frac{1}{2}\frac{(\sigma_*\eta)^2}{(1+\vartheta/T_1)^2}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma_*\eta} + \frac{1}{4}\frac{\sigma_*^2}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\frac{d\sigma_\eta}{d\sigma_*\eta}\,. \tag{44}$$

Nach (30) ist

$$\frac{du/u_0}{d\sigma_*\eta} = \frac{u_0-u_1}{u_0}\,\gamma\,\frac{e^{-E(\sigma_*\eta)^2}}{(\alpha\Phi(\sigma_*\eta)+\beta)^{E+1}}\,,$$

nach (28)

$$\frac{-1}{(1+\vartheta/T_1)^2}\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma_*\eta} = \alpha\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(\sigma_*\eta)^2}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{p_\infty - p_{-\infty}}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\,\sigma_*^2 = \frac{u_0-u_1}{u_0}\,4(1+\vartheta_0/T_1)\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma_*\eta)^2\,e^{-E(\sigma_*\eta)^2}}{(\alpha\Phi(\sigma_*\eta)+\beta)^E}\,d\sigma_*\eta + \frac{\vartheta_0}{T_1}\,. \tag{45}$$

Für $\vartheta_0/T_1 = 0$ ergibt (45)

$$\frac{p_\infty - p_{-\infty}}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\,\sigma^2 = -2\,\frac{u_0-u_1}{u_0}\,. \tag{46}$$

also Überdruck im Innern des sich in bewegter Luft (Strahl 1) ausbreitenden Strahles (Strahl 0). Diese Formel, die übrigens, wie man zeigen kann, für beliebige $(u_0-u_1)/u_0$ gilt, hat bereits *H. Görtler*[1] abgeleitet.

Für nicht zu kleine ϑ_0/T_1 überwiegt wegen $\dfrac{u_0-u_1}{u_0} \approx 0$ das zweite Glied in (45):

$$\frac{p_\infty - p_{-\infty}}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\,\sigma_*^2 \approx \frac{\vartheta_0}{T_1}\,. \tag{47}$$

Für nicht zu kleine Temperaturdifferenzen haben wir also einen der Temperaturdifferenz proportionalen Unterdruck im Innern des sich in Luft fast gleicher Geschwindigkeit (Strahl 1) ausbreitenden Strahls (Strahl 0) zu erwarten.

Wegen der großen Beträge von σ^2 bzw. σ_*^2 (im Fall $\vartheta_0/T_1 = 0$, $(u_0-u_1)/u_0 = 1{,}0$ z. B. ergibt sich nach *Görtler*[1] $\dfrac{p_\infty - p_{-\infty}}{(\varrho_0/2)\,u_0^2} = -0{,}0055$; im übrigen s. Formel (39)) sind die auftretenden Unter- bzw. Überdrücke sehr klein. Ihre Vernachlässigung erscheint also gerechtfertigt.

4. Zusammenfassung. Es wird das durch die turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahle von fast gleicher Geschwindigkeit und stark unterschiedlicher Temperatur erzeugte Feld der Geschwindigkeit und Temperatur berechnet. Als charakteristischer Effekt ergibt sich eine mit der Temperaturdifferenz wachsende Drehung des Winkelraumes der Mischzone zum heißeren Strahl hin.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Jägerstraße 22/23.
Deutsche Akademie der Wissenschaften, Institut für Mathematik,
Abteilung „Angewandte Mathematik", Berlin W 8.

[1] *H. Görtler*, a. a. O.

Das polarisationsoptische Verhalten der Kunststoffe Celluloid und Dekorit*.

Von A. Schäfer.

1. Einleitung. Für polarisationsoptische Versuche, die nicht im rein elastischen Gebiet durchgeführt werden, ist die Kenntnis der sich im Inneren eines belasteten Modellwerkstoffes abwickelnden Vorgänge wichtig. Eine Deutung dieser Vorgänge kann aber erst erfolgen, nachdem eine Erklärung für die unter der Belastung auftretende Doppelbrechung gegeben ist. Es wird danach mit diesen Kenntnissen Dekoritmaterial verschiedener Härtungsgrade untersucht. Folgende Fragen werden beantwortet:

1. Was bewirkt die Härtung im Innern des Materials?
2. Was ist bei der Erstarrung räumlicher Spannungszustände[1] zu beachten?

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden aus zahlreichen Versuchsreihen mit Celluloid und Dekorit gewonnen, um Fehlschlüsse durch nicht vermeidbare Meßungenauigkeiten auszuschalten.

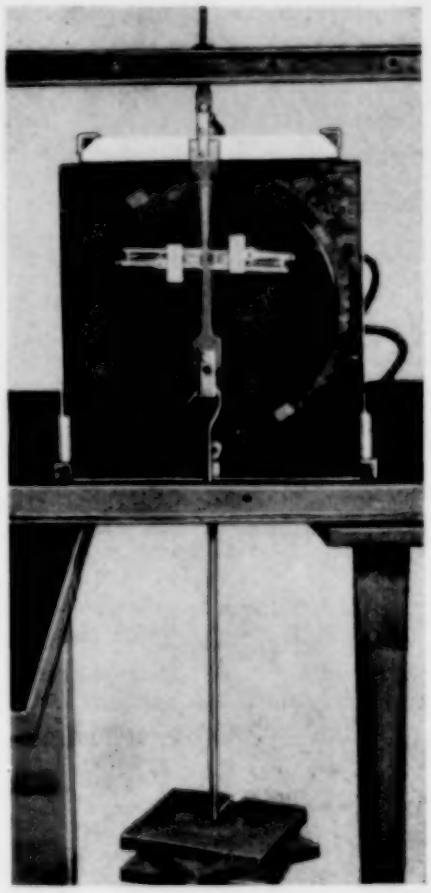

Abb. 1. Die Versuchseinrichtung ohne Analysator.

2. Allgemeines zu nachfolgenden Versuchen. Bei der Doppelbrechung durchsichtiger, amorpher Stoffe unter Spannung gilt, wie bekannt[2]

$$\delta = \frac{C}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2)\, d\,. \tag{1}$$

Hierbei ist δ der Gangunterschied zwischen außerordentlichem und ordentlichem Strahl, C eine spannungsoptische Konstante, λ die Wellenlänge des verwendeten Lichtes, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ die Hauptspannungsdifferenz, d die Dicke der Scheibe. Die folgenden Versuche werden an Zugstäben durchgeführt. Für den dann an allen Stellen des Modells gleich großen einachsigen Spannungszustand lautet (1)

$$\delta = \frac{C}{\lambda} \sigma d\,. \tag{2}$$

Besser ist es, wie noch gezeigt wird, mit der Dehnung, statt mit der Spannung zu rechnen. Mit $\sigma = \varepsilon_\sigma E$ wird (2)

$$\delta = \frac{C}{\lambda} E \varepsilon_\sigma d\,, \tag{3}$$

wobei ε_σ die Dehnung des rein elastischen Zustandes — auch Lastdehnung genannt — ist. In den folgenden Versuchen treten noch Zeitdehnungsanteile, die Kriechdehnung und die plastische Dehnung auf. Mit Kriechdehnung soll die nach der Entlastung nicht bleibende Dehnung, die sich beim Kriechen des Materials ergibt, bezeichnet werden. Die plastische Dehnung ist ein Dehnungsanteil, der bei sehr hohen Spannungen auftritt und eine bleibende Deformation zur Folge hat.

3. Versuche mit dem Modellwerkstoff Celluloid. a) Der Aufbau und die Durchführung der Versuche. Ein Zugstab von 5 mm Stärke hängt mit seinen breit ausgeführten Köpfen im Versuchsrahmen. Die Belastung erfolgt durch Auflegen von Gewichten an einer Laststange. Die Dehnung wird mit zwei *Huggenberg*tensometern gemessen. Der Versuchskörper steht zwischen gekreuzten Polarisatoren; als Lichtquelle dient eine Natriumdampflampe[3]. Die Abb. 1 zeigt den

* Die Untersuchung wurde im Mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule, München durchgeführt. — Dem Leiter des Institutes, Herrn o. Prof. Dr. *L. Föppl*, habe ich für die stete Förderung der Untersuchungen zu danken.

[1] *E. Mönch*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 267.

[2] *L. Föppl* und *H. Neubert*, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. München 1935.

[3] *L. Föppl* und *R. Hiltscher*, Bauing. 20 (1939), S. 231.

Versuchsrahmen mit Zugstab, der durch Gewichte belastet wird; zu sehen ist noch der Polarisator und ein Teil des Lichtkastens als weißer Streifen.

Im unbelasteten Zustand erscheint der zwischen den gekreuzten Polarisatoren stehende Stab dunkel. Mit steigender Last tritt im mittleren Stabteil eine gleichmäßige Aufhellung und Verdunklung ein. Der Übergang von einer Verdunklung zur nächstfolgenden entspricht einer Isochromatenordnung. Die Zeitpunkte der stärksten Abdunklungen lassen sich sehr genau feststellen. Ist die größte Abdunklung erreicht, so wird die Dehnung und die Last abgelesen.

b) Die Ergebnisse der Celluloidversuche. Die Versuche zeigen, daß bei konstanter Last von einer bestimmten Spannung ab mit der Zeit ein merkliches Kriechen und damit eine merkliche Helligkeitsänderung des Stabes in der spannungsoptischen Einrichtung eintritt. Zu einer bestimmten Zunahme des spannungsoptischen Effektes bei konstanter Last gehört nicht mehr die Dehnungszunahme, die bei einer Laststeigerung zur Erreichung des gleichen optischen Effektes erforderlich ist. Zu diesem Ergebnis führen auch Versuche, die mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten durchgeführt werden. Als Beispiel zur Änderung der Belastungsgeschwindigkeiten seien hier die Versuche 4 und 5 der Zahlentafel 1 angeführt. Beim Versuch Nr. 4 beträgt die Belastungszeit von der 3. zur 4. Isochromatenordnung 20 Minuten; beim Versuch Nr. 5 nur 2 Minuten. Die Tabelle 1 zeigt, daß der Isochromatensprung von einer Ordnung durch eine bestimmte Last- und eine bestimmte Kriechdehnung erreicht wird. Die Dehnungsanteile sind, da ihre optischen Wirkungen verschieden stark sind, mit entsprechenden Faktoren zu versehen. Wird in Gleichung (2) für $C/\lambda = a^*$ und $d = 1$ gesetzt, so ist bei Berücksichtigung der Kriechdehnung „$\varepsilon_\varkappa$“ der optische Effekt

$$\delta = a^* \sigma + b\varepsilon_\varkappa \tag{4}$$

oder nach (3) bei $\frac{C}{\lambda} E = a$

$$\delta = a\varepsilon_\sigma + b\varepsilon_\varkappa \tag{5}$$

In Zahlentafel 1 wird $a = 1$ gesetzt; dann ist $b = 1/7{,}5$.

Die Summe aus beiden Dehnungen ist, wenn die Faktoren entsprechend bestimmt werden, für jeden Isochromatensprung konstant.

Tabelle 1. *Der Einfluß der Last- und Kriechdehnung auf den optischen Effekt.*

Vers. Nr.	1 Isochromatensprung i. Ordnung	2 Spannungssprung i. kg/cm²	Dehnungen in 1/400 mm bei 20 mm Meßlänge: 3 Tensometeranzeige $\varepsilon_\sigma + \varepsilon_\varkappa$	4 Lastdehnung ε_σ	5 Kriechdehnung $\varepsilon_\varkappa / 7{,}5$	6 = 4 + 5 $\varepsilon_\sigma + 1/7{,}5\ \varepsilon_\varkappa$
1	von 0 n. 1	95	29	29	0	29
2	„ 1 „ 2	91	36	28	8/7,5 = 1	29
3	„ 2 „ 3	82	54	25	29/7,5 = 4	29
4	„ 3 „ 4	58	101	18	83/7,5 = 11	29
5	„ 3 „ 4	88	42	27	15/7,5 = 2	29

4. Versuche mit dem Modellwerkstoff Dekorit. a) Allgemeines und die Grundlagen zur Versuchsdurchführung. Die Versuche ergeben, daß beim Kunststoff Dekorit b nicht konstant ist. Die Abnahme des b-Wertes bei höheren Ordnungen deutet daraufhin, daß bei diesen Laststufen ein Dehnungsanteil vorhanden ist, der nur von einem geringen oder von keinem optischen Effekt begleitet wird; zeitlich — bei konstanter Last — sind ebenfalls Schwankungen vorhanden. Ein genauerer Aufschluß darüber wird erhalten, wenn die Änderung des optischen Effektes mit größerer Genauigkeit und größerer Geschwindigkeit festgestellt werden kann. Diese Forderung erfüllt die Kompensation mit Hilfe eines $\lambda/4$-Plättchens, das zwischen Modell und Analysator zusätzlich angebracht wird[1]. Die Ausgangsgleichung, die für die Versuchsdurchführung maßgebend ist, ist Gleichung (5). An Stelle der Kriechdehnung $\varepsilon_\varkappa$ in (5) soll die Zeitdehnung ε_z treten, zur Kennzeichnung, daß folgend außer der Kriechdehnung noch weitere Zeitdehnungsanteile zu berücksichtigen sind; für b ist dann b_z zu setzen. Eine Zunahme des optischen Effektes $\Delta\delta$ unter konstanter Last wird durch eine Zunahme der Zeitdehnung $\Delta\varepsilon_z$ bewirkt:

$$\delta + \Delta\delta = a\,\varepsilon_\sigma + b_z\,(\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_z)\,. \tag{6}$$

[1] *G. Mesmer*, Spannungsoptik, S. 59. Berlin 1939.

Nach Gleichung (5) und (6) ist $\Delta\delta = b_z \Delta\varepsilon_z$;

die Zunahme des optischen Effektes wird in Winkelgraden am Analysator gemessen; deshalb soll für $\Delta\delta$ nun $\Delta\alpha$ gesetzt werden:

$$\Delta\alpha = b_z \Delta\varepsilon_z \qquad \text{oder} \qquad b_z = \frac{\Delta\alpha^\circ}{\Delta\varepsilon_z} ; \tag{7}$$

b_z ist die Zunahme der Ordnung, bezogen auf die Zeitdehnung in Prozenten, für einen Stab von 1 cm Dicke.

Es läßt sich auch ein a für die Belastungsdehnung definieren. Eine Zunahme des optischen Effektes wird hierbei ausschließlich durch eine Zunahme der Belastungsdehnung $\Delta\varepsilon_\sigma$ hervorgerufen. Mit Gleichung (5) ist

$$\delta + \Delta\delta = a\,\varepsilon_\sigma + a\,\Delta\varepsilon_\sigma ;$$

daraus folgt $\Delta\alpha = a\Delta\varepsilon_\sigma$ oder $a = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\varepsilon_\sigma}$. (8)

Der Wert a ist die Zunahme der Ordnung, bezogen auf die Lastdehnung in Prozenten, für einen Stab von 1 cm Dicke.

Es werden hier nur solche Ergebnisse ausgewertet, bei denen die Dehnungen an den beiden angesetzten Tensometern immer die gleichen Wertzunahmen zeigen. Diese Bedingung setzt ein einwandfreies Material und eine sehr gute Bearbeitung voraus.

b) Die Zeitdehnung in Abhängigkeit von der Belastung. Die Belastungshöhen werden so groß gewählt, daß ein merklicher Kriecheinfluß vorhanden ist. Die folgenden in Tabelle 2 zusammengestellten Versuchsergebnisse zeigen, daß mit zunehmender Last die Anfangs-b_z-Werte bis zu einem gewissen Grenzwert abklingen, um dann mit der Zeit alle einer gemeinsamen tieferen Grenze ($b \approx 10$), die durch die Kriechdehnung gegeben wird, zuzustreben.

Tabelle 2. *Die Abnahme des optischen Effektes — bezogen auf die Zeitdehnung — in Abhängigkeit von der Spannung und von der Zeit.*

σ in kg/cm²	$b_z = \frac{\Delta\alpha^\circ}{\Delta\varepsilon_z\,\% \cdot 100}$ Bei konstanter Spannung nach ungefähr folgenden Zeiten in Minuten.						
	3	6	9	12	15	18	21
10,8	21,0	21,0	20,5	—	—	—	—
21,6	18,2	17,5	16,8	16,2	—	—	—
37,8	15,1	13,8	12,8	11,9	11,2	10,6	10,4
54,0	14,7	13,2	12,0	11,0	10,5	10,4	10,4
81,0	14,3	12,8	11,7	10,8	10,4	10,3	10,3
108,0	14,1	12,3	10,8	10,4	10,4	10,3	10,3

Aus Tabelle 2 kann gefolgert werden, daß ein nach einer gewissen Zeit sich auskristallisierender Vorgang zu Anfang der Zeitmessung noch von einem oder mehreren Vorgängen, die eine b_z-Wertvergrößerung hervorrufen, überdeckt wird.

Der sich bei der Erhöhung der Spannung ergebende a-Wert wird laufend kontrolliert; er ist bei allen Laststufen:

$$a = \Delta\alpha^\circ / \Delta\varepsilon_\sigma\,\% 100 = 42 \tag{8a}$$

c) Der Zeitdehnungsverlauf bei einer bestimmten Belastung. Tabelle 2 sagt noch sehr wenig über die Vorgänge im Innern des Materials aus. Um genauere Aussagen hierüber machen zu können, wird in kleinen Zeitabständen (Bruchteile einer Minute) die Geschwindigkeit, mit der sich die Zeitdehnung und die Ordnung ändert, bestimmt. Die Versuchsergebnisse wurden durch zahlreiche Versuchsreihen erhärtet und bestätigt.

Untersucht werden Materialien im Anlieferungszustand, Materialien, die kurz vor der Messung einer Belastung unterworfen wurden — ermüdete Materialien — und Materialien, die beansprucht waren, aber durch längeres Lagern sich wieder erholt hatten; letztere Materialien standen nicht mehr unter den Nachwirkungen der vorherigen Belastung. Untersucht werden ferner Materialien, die vor der Messung einer bestimmten Spannung ausgesetzt waren und später daraufhin bei einer Wiederbelastung bis zu dieser Spannungsgrenze die Merkmale der ermüdeten Materialien und oberhalb der Grenzen die Merkmale der erholten Materialien zeigen.

Das Ergebnis dieser Versuchsreihen ist folgendes: Bei entsprechend gewählten konstanten Spannungen zeigt ein erholtes Material in den ersten Minuten des Versuchsablaufs folgendes Bild: Nimmt $\Delta\varepsilon_z/\Delta t$ ab, so steigt zur gleichen Zeit $\Delta\alpha/\Delta t$ an und umgekehrt (Abb. 2). Der Kurvenzug $\Delta\alpha/\Delta\varepsilon_z = b_z$ ist keine Gerade mit konstanter Neigung, sondern eine Kurve, die ihre Nei-

gung in einem bestimmten Turnus ändert. Der b_z-Wert schwankt zwischen einem Mindestwert, der die Größe des Beiwertes der Kriechdehnung hat und einem Höchstwert, der die Größe von a erreicht (Abb. 3 Kurve 1).

Nach längerer Belastungszeit geht der Kurvenzug $\Delta\alpha/\Delta\varepsilon_z$ in eine Gerade mit konstanter Neigung, die durch den Kriechvorgang gegeben wird, über (Abb. 3 Kurve 2 u. 3).

Bei sehr großen Belastungen, die in der Nähe der Bruchspannung liegen oder nicht so großen Belastungen aber dann längeren Belastungszeiten überlagert sich noch ein dritter Dehnungsanteil, der von keinem oder nur von einem sehr geringen optischen Effekt begleitet wird.

5. Die physikalische Deutung des optischen Effektes. Bevor die Versuchsergebnisse besprochen werden, soll eine aus diesen sich ergebende physikalische Deutung des optischen Effektes beschrieben werden. Die Doppelbrechung kann an einem Stab, der Translationsschwingungen ausführt, anschaulich erläutert werden. Es wird ein schwingender Stab von elliptischem Querschnitt betrachtet. Entsprechend seiner Steifigkeit in den Hauptrichtungen sind die Frequenzen, in denen er schwingt. Wird er in einer beliebigen Richtung angestoßen, so tritt eine Zerlegung

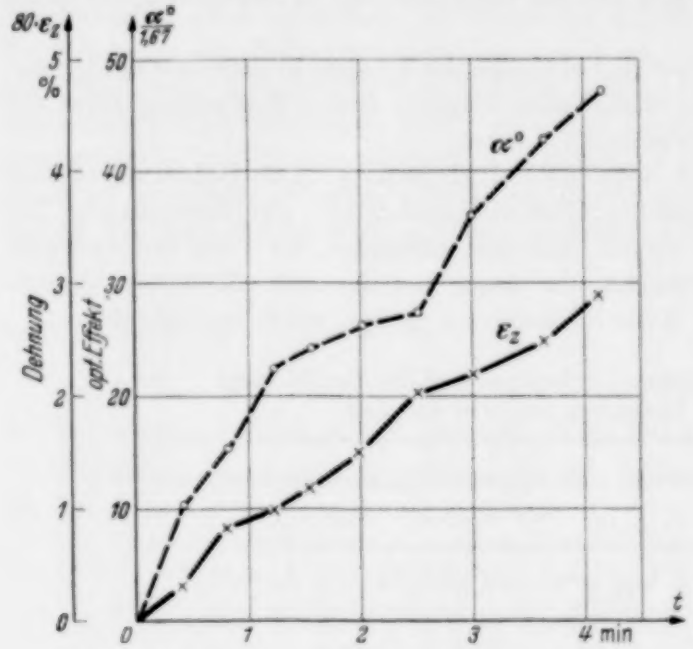

Abb. 2. Der optische Effekt und die Zeitdehnung bei einem erholten Material in Abhängigkeit von der Zeit.

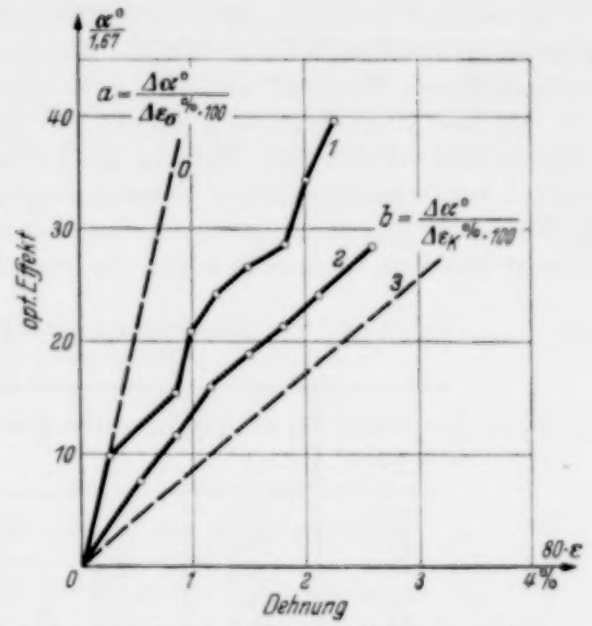

Abb. 3. Der optische Effekt in Abhängigkeit von der Dehnung bei verschiedenen Belastungs- und Zeiteinflüssen.

der Schwingungen nach der Richtung der kleinsten und größten Steifigkeit ein; beide Bewegungen erfolgen unabhängig voneinander, jede mit der ihr eigenen Frequenz. Der noch nicht mit einer Doppelbrechung behaftete, unbelastete Kunststoff kann wie ein durch Querschnitte aufgeteilter Stab behandelt werden, dessen elliptische Scheiben in vollkommener Unordnung zueinander liegen und somit keine ausgezeichnete Richtung mehr besitzt. Erst durch ein Aneinanderreihen der Scheiben, wobei auch die entsprechenden Hauptachsen aufeinander zu liegen kommen, also durch ein Ordnen, würde wieder ein dem elliptischen Stabe ähnliches Verhalten eintreten. Die Ordnung wird beim betrachteten Kunststoff durch eine Spannung hervorgerufen, die eine Doppelbrechung zur Folge hat. Die Doppelbrechung des Lichtes besteht darin, daß die ankommende Lichtbewegung in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt wird, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen.

6. Diskussion der Dekorit-Versuchsergebnisse. Die Analyse der Versuchsergebnisse läßt auf drei sich unterscheidende Vorgänge im Inneren eines belasteten Materials schließen, die sich am markantesten durch die Werte $\Delta\alpha/\Delta\varepsilon$ unterscheiden und dessen Größen unabhängig von der Belastung und der Belastungszeit sind. Durch Überlagerung der einzelnen Vorgänge ergibt sich bei einer nicht entsprechend schnell durchgeführten Belastung eine Erniedrigung des a-Wertes durch die Einwirkung von Zeiteinflüssen, wie Kriech- und plastische Dehnungsanteile. Bei den Zeitdehnungsmessungen treten ebenfalls Überlagerungen auf. Die Vorgänge selbst lassen sich durch eine entsprechende Materialbehandlung, wie Härten und durch eine entsprechende Belastungshöhe und Belastungszeit steuern. Alle Ergebnisse lassen sich erklären, wenn der optische Effekt, wie es unter 5 ausgeführt wurde, als eine Ordnung von optischen Grundelementen, die durch die

Ringverbindungen dargestellt werden, gedeutet wird. Unterstützt wird diese Erklärung noch durch folgendes Versuchsergebnis: Ein in der Belastungsrichtung durchstrahlter Stab zeigt in dieser Strahlrichtung bei der Belastung keine Änderung des optischen Effektes. Von einem sehr großen optischen Effekt wird die Belastungsdehnung begleitet. Die optischen Grundelemente werden durch das durch die Belastung hervorgerufene Moment in Richtung der Belastung gedreht. Die Größe der Drehung ist von der Spannung und der Stärke der Bindungen abhängig. Der beschriebene Vorgang gehorcht dem *Hooke*schen Gesetz. Bei konstanter Last tritt nun ein als Kriechen bezeichneter zweiter Vorgang stark in Erscheinung; dieser äußert sich im Versuch durch eine geringere Ordnung gegenüber Vorgang 1 bei entsprechender Dehnung; die Geschwindigkeit mit der dieser Vorgang abläuft, kann als gering gegenüber der des Vorganges 1 bezeichnet werden. Erklärt werden kann das Kriechen durch das Ausrichten von Ketten oder ganzen Verbänden in Richtung der Belastung. Der zur plastischen Dehnung gehörige Vorgang ergibt keine Ordnung der optischen Grundelemente; er kann durch eine Translation von Kettengliedern dargestellt werden.

7. Versuche mit Dekorit verschiedener Härtungsgrade. Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf ein Dekoritmaterial bestimmter Härtung. Folgend soll das rein elastische Verhalten (*Hooke*) verschieden stark gehärteter Dekoritmaterialien verglichen werden. Diese Materialien verlangen zur Steigerung der Ordnung um eine Einheit ein bestimmtes $\Delta\sigma$ und bestimmtes $\Delta\varepsilon_\sigma$; ihr Produkt ist bei gleicher Dicke d eine Konstante.

$$\delta_{=1} = \bar{a}\,\Delta\sigma\,\Delta\varepsilon_\sigma = \bar{k} \text{ (bei } d = \text{konstant)}. \tag{9}$$

Die Größe des Quotienten $\Delta\sigma/\Delta\varepsilon_\sigma$ ist ein Maß für die Stärke der Härtung.

Bei Berücksichtigung der Modelldicke d ist

$$\delta_{=1} = \bar{a}\,\Delta\sigma\,\Delta\varepsilon_\sigma\,d^2 = k\,. \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) und (10) ergeben sich aus Versuchen, die bei Zimmertemperatur durchgeführt werden. Versuche bei Temperaturen bis zu ungefähr 70° C zeigen die gleichen Abhängigkeiten und auch praktisch die gleiche Größe der Konstanten $\bar{a}$.

Zur Erklärung der Gleichungen (9) und (10) werden zwei neue Begriffe eingeführt.

1) $F_{(eff)}$ ist der effektive Materialquerschnitt, d.h. der Querschnitt, der zum Tragen der Last vorhanden ist; also der Querschnitt des gebundenen Materials.

2) $d_{(eff)}$ ist die effektive oder optisch wirksame Stärke des Materials. Je mehr Material gebunden ist, je größer ist die optisch wirksame Stärke des Probestückes.

Bei einem Zugstab, der z. B. ungehärtet eine effektive Stärke von 2 Einheiten und einen effektiven Querschnitt von 6 Einheiten besitzt, soll durch eine Härtung die effektive Materialstärke verdoppelt werden; bei einer linearen Vergrößerung der effektiven Stärke ändert sich der effektive Querschnitt quadratisch; er beträgt also nach der Härtung 24 Einheiten.

Durch die Härtung wurde die optisch wirksame Materialstärke verdoppelt, d. h. zur Erhöhung der Ordnung um eine Einheit ist nur noch die halbe Dehnung gegenüber dem ungehärteten Material erforderlich; der lastübertragende Querschnitt wurde vervierfacht; die äußeren Abmaße blieben ungeändert. Die effektiven Materialgrößen führen zwangsläufig mit den üblichen Formeln zu den Gleichungen (9) und (10).

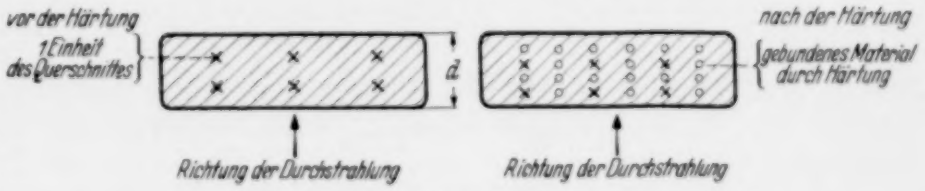

Abb. 4. Die effektiven Materialgrößen.

8. Die Beziehung zwischen der spannungsoptischen Konstanten[1] S und dem Elastizitätsmodul E. Die spannungsoptische Konstante S wurde als die Hauptspannungsdifferenz je Isochromatenordnung bei 1 cm Modelldicke — beim Arbeiten mit Natriumlicht — definiert. Mit (9) kann mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes die Beziehung $\delta_{=1} = \bar{a}\,(\Delta\sigma)^2/E$ aufgestellt werden. Beim Fortschreiten um eine Ordnung kann nach der Definition für $\Delta\sigma$ nun S gesetzt werden, wenn die Vergleichsstäbe immer eine Stärke von 1 cm haben, damit wird $\delta_{=1} = \bar{a}\,S^2/E$.

Werden Probestücke verschiedener Härtungsgrade verglichen, so gilt

$$\frac{S_1^2}{E_1} = \frac{S_2^2}{E_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{E_1}}{S_1} = \frac{\sqrt{E_2}}{S_2} = \frac{\sqrt{E_3}}{S_3} = \varkappa\,. \tag{11}$$

[1] *E. Mönch*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 269.

Gleichung (11) sagt aus, daß beim Arbeiten im elastischen Bereich (*Hooke*) zwischen dem Elastizitätsmodul und der spannungsoptischen Konstanten bei Stücken mit verschiedenen Härtungsgraden ein Zusammenhang besteht.

9. Der Einfluß des Kriechens auf die Konstante $\varkappa$. Bei der folgenden Betrachtung soll $\bar{\varkappa}$ eine durch einen Versuch ermittelte Konstante sein, die nicht nur den rein elastischen Anteil, sondern auch noch einen Kriechanteil enthalten kann. Der Quotient $\bar{\varkappa}/\varkappa = \psi$ gibt Auskunft darüber, wie groß der Kriecheinfluß oder weitere Zeiteinflüsse im ermittelten $\bar{\varkappa}$-Wert sind. Ist $\psi = 1$, so wird der Versuch im elastischen Gebiet durchgeführt. Ist $\psi > 1$, so ist noch ein Zeiteinfluß vorhanden.

Der Einfluß des Kriechens auf die Größe von ψ soll an einigen Beispielen erläutert werden: hierzu werden die Werte des ungehärteten Materials aus Tabelle 2 genommen. Dieses Material erfordert zur Erhöhung der Ordnung um eine Einheit durch eine Belastungsdehnung bei einem 1 cm starken Stab eine Spannung von $\Delta\sigma = 10\ \mathrm{kg/cm^2}$; nach Gleichung (8a) ist dann $\Delta\varepsilon_\sigma = \Delta\lambda/a = 180/42 \cdot 10^4 = 4{,}3/10^4$. Um durch Zeiteinflüsse — keine Spannungserhöhung — eine Erhöhung der Ordnung um eine Einheit zu erhalten ist eine Dehnung $\Delta\varepsilon_z = 180/b_z \cdot 10^4$ erforderlich.

Wird b_z sehr hoch mit 20 eingesetzt, so ist $\Delta\varepsilon_z = 9/10^4$.

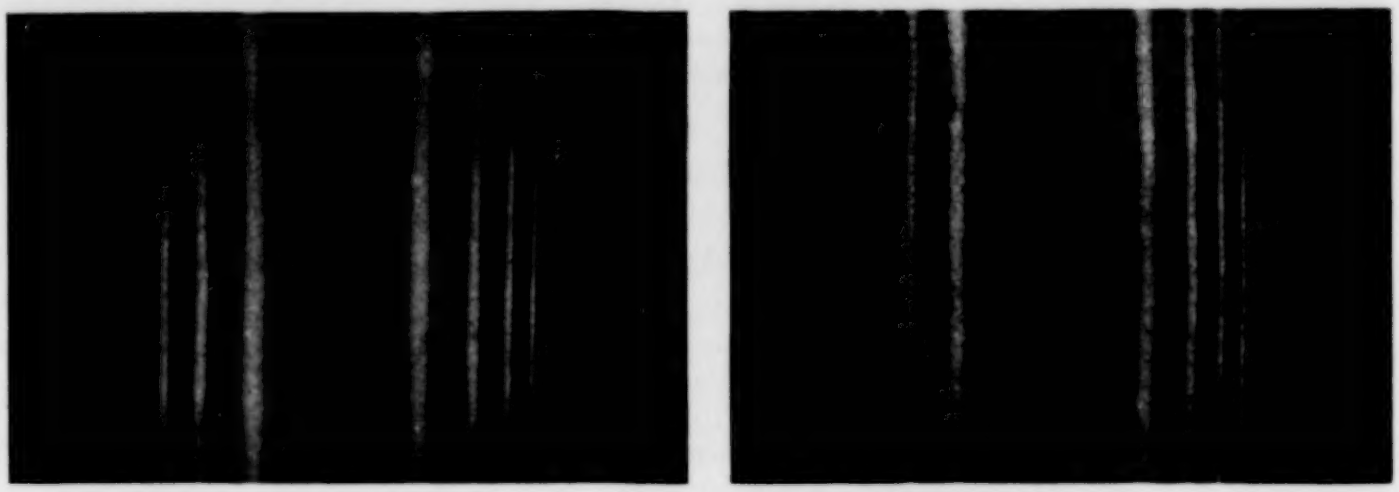

Abb. 5 u. 6. Der Randeffekt bei zunehmender Belastung.

Bei der folgenden Betrachtung bedeutet $\bar{\varkappa}_{0,1}$ soviel wie: 1/10 einer Isochromatenordnung wird durch eine Belastungsdehnung bewirkt; die restlichen 9/10 müssen, um eine Steigerung der Ordnung um eine ganze Einheit zu erhalten, durch Zeitvorgänge gedeckt werden. Bei $\bar{\varkappa}_{0,1}$ ist einzusetzen: $\Delta\sigma = 0{,}1 \cdot 10 = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$; $\Delta\varepsilon = 0{,}1\,\Delta\varepsilon_\sigma + 0{,}9\,\Delta\varepsilon_z = 8{,}5 \cdot 10^{-4}$. Damit wird

$$\bar{\varkappa}_{0,1} = 34{,}5 \left| \sqrt{\mathrm{kg/cm^2}} \Big/ \frac{\mathrm{kg/cm^2}}{\mathrm{Ordnung}}\ \mathrm{cm} \right| .$$

Mit steigender Beanspruchung wird die Beeinflussung des $\bar{\varkappa}$-Wertes durch Zeitvorgänge immer stärker, d. h. die Steigerung der Ordnung wird durch kleinere Spannungsdifferenzen bei größeren Zeitdehnungen erreicht; die $\bar{\varkappa}$- und ψ-Werte steigen an.

Tabelle 3. *Der Einfluß der Zeitdehnungen auf die Größe von $\varkappa$ und ψ.*

$\varkappa = \lvert\bar{\varkappa}\rvert_{1{,}0} = 15{,}2$	$\psi_1 = 1{,}00$ (aus Belastungsdehnung)
$\lvert\bar{\varkappa}\rvert_{0{,}5} = 17{,}4$	$\psi_{0{,}5} = 1{,}15$
$\lvert\bar{\varkappa}\rvert_{0{,}2} = 25{,}0$	$\psi_{0{,}2} = 1{,}64$
$\lvert\bar{\varkappa}\rvert_{0{,}1} = 34{,}5$	$\psi_{0{,}1} = 2{,}27$

Ist bei der Eichung $\psi = 1$, so kann ohne Bedenken das Material bis zur Eichspannung im Versuch belastet werden; die Werte E und S gelten dann für jede Spannung, die die Eichspannung nicht überschreitet.

Ist bei der Eichung $\psi > 1$, so gelten die bei der Eichung ermittelten Werte E und S nur für eine Spannungscharakteristik, die der des Eichstabes entspricht, d. h. der Spannungsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit und Temperatur muß beim Eichstab und Modell der gleiche sein.

10. Der Randeffekt des Kondensationsprodukts Dekorit. Ein randeffekt- und spannungsfreies Material erscheint in der spannungsoptischen Einrichtung in allen drei Blickrichtungen

dunkel. Eine Platte mit Randeffekt zeigt verschiedene Isochromatenordnungen von der Plattenmitte zum Rand hin.

Ausgehend von einem Material mit der ersten und zweiten Isochromatenordnung wird zur Erreichung des Bildes von Abb. 5 die Last um 65 kg gesteigert; zur Erreichung des Bildes von Abb. 6 um weitere 25 kg. Bei 65 kg Laststeigerung war eine Linienzunahme von etwas über 4, bei weiteren 25 kg um rund 2 zu beobachten.

Die Auswertungen der Abb. 5 und 6 lassen den Randeffekt als eine Zunahme der effektiven Materialstärke zur Plattenaußenschicht mit einer Überlagerung eines Eigenspannungszustandes erkennen. Der Verlauf der effektiven Materialstärke läßt sich ebenfalls aus den Abbildungen ermitteln.

11. Beschreibung einiger Bruchbilder. Ist die Belastungsgeschwindigkeit sehr hoch, so zeigt der zerrissene Stab keine oder nur geringe verbliebene optische Effekte; der Stab erscheint auch nach dem Bruch, wie seine Umgebung, in der optischen Apparatur dunkel. Ein mit geringer Belastungsgeschwindigkeit zu Bruch gebrachter Stab zeigt in der Apparatur noch Zeitdehneinflüsse, deren Größe von der Härtung des Materials abhängig sind. Der Stab der Abb. 7 ist aus einem Material gearbeitet, das nur leicht gehärtet ist; er wird mit geringer Geschwindigkeit bis zum Bruch belastet. Sehr gut sind die verbliebenen Zeitdehnungsanteile, des vor der Belastung vollkommen schwarz erscheinenden Stabes, zu erkennen. Abb. 8 zeigt einen Zugstab nach der Entlastung; seine Last wurde längere Zeit konstant gehalten. Bei einem Celluloidstab, der langsam belastet wird, zeigt es sich, daß der Bruch von einem Zentrum mit mehr oder weniger großer Geschwindigkeit ausgeht. Es steigt plötzlich an einer bestimmten Stelle im Bruchquerschnitt die Isochromatenzahl an; das gleiche Ansteigen der Isochromaten wird dann noch an weiteren Stellen, bis der Bruch eintritt, beobachtet.

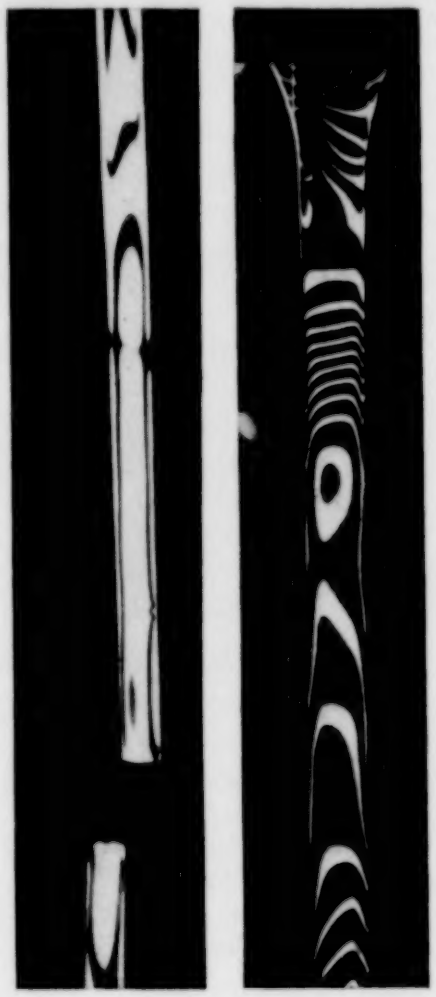

Abb. 7 u. 8. Zugstäbe mit verschieden starken Zeiteinflüssen.

12. Zusammenfassung. Die Versuchsergebnisse lassen sich erklären, wenn der spannungsoptische Effekt als eine Ordnung von optischen Grundelementen gedeutet wird. Die optischen Grundelemente besitzen eine gewisse Doppelbrechung, die aber durch die vollkommene Unordnung der Elemente im unbelasteten Material nicht nach außen in Erscheinung treten kann; eine aufgebrachte Belastung ruft eine Ausrichtung hervor und läßt die bisher verborgene Doppelbrechung nun nach außen sichtbar werden.

Im belasteten Material können drei Dehnungsanteile unterschieden werden, die sich am markantesten durch die Größe des Quotienten, der aus dem optischen Effekt und der zugehörigen Dehnung gebildet wird, unterscheiden.

Versuche mit verschieden stark gehärteten Dekoritmaterialien ergeben, daß durch die Härtung eine Zunahme des effektiven Querschnitts bewirkt wird; der effektive Querschnitt ist der Querschnitt des gebundenen Materials; nur dieser ist befähigt, die eingeleitete Last weiterzugeben.

Für den rein elastischen Bereich (*Hooke*) wird für Materialien mit verschiedenen Härtungsgraden eine Konstante $\varkappa$ gegeben, die auch praktisch bei Versuchen mit erhöhter Modelltemperatur erhalten bleibt. Anschließend wird ein Faktor ψ definiert, der Auskunft über die Größe der rein elastischen Dehnung zur Zeitdehnung bei der Erhöhung der Isochromatenordnung um eine Einheit gibt.

(Eingegangen am 17. September 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *A. Schäfer*, München, Technische Hochschule, Institut für Metallurgie und Metallkunde.

Über zwei mit der Tragflügeltheorie in Zusammenhang stehende Integralgleichungen.

Von J. Dörr.

1. Aufgabenstellung. Bei der Untersuchung der Strömung durch ein senkrechtes Flügelgitter[1] wurde die Integralgleichung

$$f(x)=\frac{1}{2h}\int_{-1}^{+1} g(y)\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi(x-y)}{h}\,dy \qquad \text{mit} \qquad h=h'+ih'' \tag{1}$$

behandelt, die im Sonderfall $h''=0$ den Zusammenhang zwischen Abwind und Wirbelstärke an einem Flügel des senkrechten Flügelgitters beschreibt. Für die Sonderfälle $h''=0$ und $h'=0$, $-1>h''>+1$ wurde unmittelbar gezeigt, daß die Integralgleichung (1) den Ausdruck

$$g(x)=\frac{k\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{h}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi x}{h}}{\pi\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi}{h}-\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi x}{h}}}+\frac{2}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi}{h}-\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi x}{h}}}\int_{-1}^{+1}\frac{f(y)\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi}{h}-\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi y}{h}}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi(y-x)}{h}}\,dy \tag{2}$$

als Lösung besitzt. Die in (1) und (2) auftretenden Integrale sind dabei wie üblich als *Cauchy*sche Hauptwerte zu verstehen. Man kann zeigen, wie in der zitierten Arbeit erwähnt wurde, daß (2) auch dann noch die Lösung von (1) darstellt, wenn $h=h'+ih''$, $h'\neq 0$, $h''\neq 0$ ist. Der Beweis dafür wurde nicht gebracht, da er für die technisch interessierenden Lösungen ($h''=0$ und gegebenenfalls $h'=0$, $-1>h''>+1$) bedeutungslos ist. Der Beweis führt indessen auf bemerkenswerte mathematische Ergebnisse und soll deshalb an dieser Stelle nachgeholt werden.

2. Beweis der Lösung für komplexes h. In der zitierten Arbeit wird gezeigt, daß man mit

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi x}{h}=\varepsilon\eta, \qquad \mathfrak{Sin}\,\frac{\pi y}{h}=\varepsilon\xi, \qquad \varepsilon=\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{h} \tag{3}$$

die Integralgleichung (1) auf die folgenden beiden zurückführen kann:

$$\varphi_1(\eta)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\varepsilon^2\eta^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\psi_2(\xi)}{\sqrt{1+\varepsilon^2\xi^2}\,(\eta-\xi)}\,d\xi\,, \qquad \varphi_2(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\psi_1(\xi)}{\eta-\xi}\,d\xi\,. \tag{4}$$

Hier kennzeichnet der Zeiger 1 bzw. 2 jeweils den ungeraden bzw. geraden Funktionsteil. Unter der Voraussetzung $h''=0$ oder $h'=0$, $-1>h''>+1$ bildet sich durch die Transformation (3) das Stück der reellen Achse von -1 bis $+1$ der y-Ebene auf das Stück der reellen Achse von -1 bis $+1$ der ξ-Ebene ab und zwar eindeutig. Deshalb sind die Integralgleichungen (4) in diesen Sonderfällen identisch mit dem Typ, für den *Betz* in seiner Dissertation den lösenden Kern angegeben hat.

Im allgemeinen Fall, wenn h komplex ist, bildet sich das Stück der reellen Achse von -1 bis $+1$ der y-Ebene nicht mehr auf die reelle Achse der ξ-Ebene ab. Das Bild dieser Strecke in der ξ-Ebene ist vielmehr eine von -1 über 0 nach $+1$ durch die komplexe Ebene laufende doppeltpunktfreie Kurve endlicher Länge, die überall eine Tangente hat und antisymmetrisch zur reellen Achse ist.

Auch bei der Integration über diesen allgemeineren Weg ist der *Cauchy*sche Hauptwert zu nehmen, was ohne weiteres möglich ist, da der Integrationsweg in der ξ-Ebene überall eine Tangente hat.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$w(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{s}\frac{p(\xi)}{\eta-\xi}\,d\xi\,. \tag{5}$$

Der Integrationsweg s soll dabei eine von -1 nach $+1$ beliebig durch die ξ-Ebene geführte doppelpunktfreie Kurve endlicher Länge sein, die überall eine Tangente hat. Die η-Werte sollen immer auf dem Wege s liegen, und das Integral ist als *Cauchy*scher Hauptwert zu verstehen. Die Lösung der Integralgleichung (5) für den beschriebenen allgemeinen Integrations-

[1] *J. Dörr*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 66.

weg s findet man am schnellsten, wenn man formal bekannte Überlegungen übernimmt. Da die so gefundene Lösung später direkt verifiziert wird, wird der formale Lösungsweg ohne Kritik der Voraussetzungen nur kurz skizziert.

Mit den Transformationen

$$\eta = -\cos\alpha \qquad \xi = -\cos\beta$$

erhält man aus (5) die Integralgleichung

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{P(\beta)\sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\,d\beta\,. \tag{6a}$$

Der Weg S ist hier eine von $\beta = 0$ nach $\beta = \pi$ laufende doppelpunktfreie Kurve endlicher Länge, die ebenfalls überall eine Tangente hat. Das Integral ist wieder als *Cauchy*scher Hauptwert zu verstehen. Wir machen nun ebenso wie in dem bekannten Sonderfall, daß S über die reelle Achse von 0 nach π geführt wird, folgenden Lösungsansatz:

$$P(\beta)\sin\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\beta\,. \tag{6b}$$

Man findet durch funktionentheoretische Betrachtungen, daß auch für den beschriebenen allgemeineren Weg S die Beziehungen

$$\int_S \frac{\cos n\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\,d\beta = \pi\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{für} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{6c}$$

gültig bleiben, wenn α auf dem Integrationsweg S liegt und das Integral als *Cauchy*scher Hauptwert verstanden wird. Daraus folgt noch auf Grund einer einfachen trigonometrischen Relation

$$\int_S \frac{\sin\beta\sin n\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\,d\beta = -\pi\cos n\alpha \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6d}$$

Geht man mit dem Reihenansatz für $P(\beta)\sin\beta$ in die Integralgleichung (6a), so kann man mit (6c) alle Integrationen ausführen und erhält

$$W(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha\,. \tag{6e}$$

Nun kann man (6b) auf Grund von (6d) auch wie folgt schreiben:

$$P(\alpha)\sin\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\beta\,d\beta\,,$$

wenn man die Vertauschbarkeit von Summation und Integration als erlaubt voraussetzt. Für den letzten Ausdruck kann man aber auf Grund von (6e) auch schreiben

$$P(\alpha)\sin\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_S \frac{W(\beta)\sin^2\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\,d\beta\,.$$

Die hiermit gefundene Lösung der Integralgleichung (6a) ist nicht vollständig, da auf Grund von (6c) für $n = 0$ auch

$$P(\alpha)\sin\alpha = \frac{k}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_S \frac{W(\beta)\sin^2\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\,d\beta$$

eine Lösung ist, wobei die Konstante k beliebig gewählt werden kann. Durch Übergang auf die Koordinaten η und ξ erhält man als formale Lösung der Integralgleichung (5) den Ausdruck

$$p(\eta) = \frac{k}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}}\int_s \frac{w(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\eta - \xi}\,d\xi\,. \tag{7}$$

Das Integral ist als *Cauchy*scher Hauptwert zu verstehen. Es dürfte schwierig sein, gestützt auf diese Herleitung allgemeinere Voraussetzungen anzugeben, unter denen die Lösung (7) gültig ist. Die Konvergenzvoraussetzungen der Reihen (6b) und (6e) auf den Kurven S in der komplexen Ebene sind nämlich wesentlich enger als bei den *Fourier*reihen für Funktionen, die nur für eine reelle Variable definiert sind. Deshalb wird nun die Richtigkeit der Lösung (7) auf direktem Wege unter gewissen Voraussetzungen verifiziert.

Durch Einsetzen von (7) in (5) folgt

$$w(\eta) = -\frac{1}{\pi^2}\int_s \frac{1}{(\eta - \xi)\sqrt{1-\xi^2}}\int_s \frac{w(\gamma)\sqrt{1-\gamma^2}}{\xi - \gamma}\,d\gamma\,d\xi \tag{8}$$

bei Beachtung der aus (6c) für $n=0$ folgenden Beziehung

$$\int_s \frac{d\xi}{(\eta-\xi)\sqrt{1-\xi^2}} = 0 \qquad (\textit{Cauchy}\text{scher Hauptwert}). \tag{9}$$

Wegen (9) dürfen wir zum Integranden des zweiten Integrals in (8) einen beliebigen auf s integrierbaren Summanden hinzuaddieren, der nicht von ξ abhängt. Wir dürfen z.B. schreiben

$$w(\eta) = -\frac{1}{\pi^2}\int_s \frac{1}{(\xi-\eta)\sqrt{1-\xi^2}} \int_s w(\gamma)\sqrt{1-\gamma^2}\left(\frac{1}{\gamma-\xi}-\frac{1}{\gamma-\eta}\right) d\gamma\, d\xi .$$

Das ist aber identisch mit

$$w(\eta) = -\frac{1}{\pi^2}\int_s \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_s \frac{w(\gamma)\sqrt{1-\gamma^2}}{(\gamma-\xi)(\gamma-\eta)}\, d\gamma\, d\xi . \tag{10a}$$

Nach einer kleinen Umformung wird daraus

$$\left.\begin{aligned} w(\eta) = &-\frac{1}{\pi^2} w(\eta)\int_s \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_s \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{(\gamma-\xi)(\gamma-\eta)}\, d\gamma\, d\xi \\ &-\frac{1}{\pi^2}\int_s \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_s \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma-\xi}\,\frac{w(\gamma)-w(\eta)}{\gamma-\eta}\, d\gamma\, d\xi . \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

Wir setzen nun voraus, auf dem Wege s seien

$$w(\gamma) \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\gamma} w(\gamma) \quad \text{stückweise stetig.} \tag{11a}$$

Die Unstetigkeitsstellen von $w(\gamma)$ seien γ_ν. Dann ist auf dem Wege s für eine beliebig kleines, aber festes ε

$$\frac{w(\gamma)-w(\eta)}{\gamma-\eta} \quad \text{stückweise stetig und stückweise stetig-differenzierbar für} \quad |\eta-\gamma_\nu| > \varepsilon, \tag{11b}$$

wenn η festgehalten wird und γ auf s variiert. Unter der Voraussetzung (11b) darf man die Reihenfolge der Integrationen des zweiten Doppelintegrals vertauschen. Man beweist das, indem man für den Weg s in der ξ- und γ-Ebene eine geeignete Parameterdarstellung wählt.

Ein brauchbarer Parameter ist z.B. die von einem beliebigen Wegpunkt aus gemessene Weglänge. Dann kann man einen von *L. Schwarz*[1] angegebenen Beweis direkt auf unser Doppelintegral übertragen. Nach Vertauschung der Reigenfolge der Integrationen sieht man auf Grund von (9), daß das zweite Doppelintegral in (10b) verschwindet. Es bleibt also nach einer kleinen Umformung des ersten Doppelintegrals:

$$w(\eta) = -\frac{1}{\pi^2} w(\eta)\int_s \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\eta-\xi)} \int_s \sqrt{1-\gamma^2}\left(\frac{1}{\xi-\gamma}-\frac{1}{\eta-\gamma}\right) d\gamma\, d\xi .$$

Mit (6c) findet man

$$\int_s \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\xi-\gamma}\, d\gamma = -\int_s \frac{\gamma^2}{\sqrt{1-\gamma^2}\,(\xi-\gamma)}\, d\gamma = \pi\xi .$$

Also ist

$$w(\eta) = \frac{1}{\pi} w(\eta)\int_s \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = w(\eta) .$$

Unter den Voraussetzungen (11) ist somit die Beziehung (8) richtig für alle γ-Werte, die auf dem Wege s liegen mit Ausnahme der endlich vielen Werte $\eta=\gamma_\nu$. Damit ist der Beweis für die Richtigkeit der Lösung (7) der Integralgleichung (5) unter den Voraussetzungen (11) erbracht. Die Integralgleichung (1) läßt sich bei komplexem Parameter h auf die Integralgleichung (5) zurückführen. Deshalb ist die Lösung (2) von (1) auch bei komplexem Parameter h richtig, wenn die vorgegebene Funktion $f(x)$ auf dem Wege $-1 \le x \le +1$ stückweise stetig und stückweise stetig-differenzierbar ist.

(Eingegangen am 10. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Johannes Dörr*, (16) Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für praktische Mathematik.

[1] *L. Schwarz*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 385.

Biege- und Torsionsschwingungen von Stäben mit beliebigen Querschnitten.

Von H.-R. Lembcke.

1. Einleitung. Die „elastische Achse" eines Stabes ist diejenige in Stablängsrichtung verlaufende Linie, in welcher alle äußeren Kräfte angreifen müssen, um eine torsionsfreie Biegung hervorzurufen. Bei allen stabförmigen Gebilden, deren elastische Achse nicht mit der Schwerachse zusammenfällt, entsteht eine Kopplung zwischen den Biegeschwingungen bezüglich der beiden Hauptträgheitsachsen und der Torsionsschwingung. Diese Erscheinung ist bekannt und im Rahmen der Berechnung von Flugzeugtragflügelschwingungen teilweise behandelt worden[1].

Sämtliche bekannten Untersuchungen sind spezieller Natur und beschränken sich auf die angenäherte Berechnung der Koppelschwingungszahlen und -formen in Fällen, bei denen sich nur zwei Schwingungsarten, eine Biege- und eine Torsionsschwingung, gegenseitig beeinflussen. Hierbei liegen die elastische Achse und eine der beiden Hauptträgheitsachsen des Querschnittes in einer Ebene, so daß die Biegeschwingungen um die andere Hauptträgheitsachse fast ungestört bleiben. Der Querschnitt ist dann meistens nur einfach symmetrisch mit einer Symmetrieachse, die mit der zuerst genannten Hauptträgheitsachse identisch ist.

Zwecks Unterscheidung wird die Kopplung zwischen einer der beiden Biegeschwingungen und der Torsionsschwingung mit Zweierkopplung und diejenige zwischen beiden Biegeschwingungen und der Torsionsschwingung mit Dreierkopplung bezeichnet.

Die vorliegende Arbeit[2] befaßt sich mit der Erweiterung der teils bekannten Theorie der Zweierkopplung auf den allgemeineren Fall der Dreierkopplung bei beliebigen unverwundenen, stabförmigen Gebilden.

2. Herleitung der Bewegungsgleichungen und des Variationsproblems. Die nachfolgenden Ausführungen gelten unter Zugrundelegung der „linearisierten" Elastizitätstheorie. Sämtliche Dämpfungseinflüsse, die Querkraftverformungen und die Rotationsträgheit der Stabelemente bezüglich der z- und y-Achse werden vernachlässigt. Die Massen- und Trägheitsmomentenverteilung sei stetig.

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird als Beispiel für Stäbe mit beliebigen, in der Einleitung gekennzeichneten Querschnitten ein einseitig eingespanntes, ungleichschenkeliges Winkeleisen betrachtet, welches Biege- und Torsionsschwingungen ausführt (Abb. 1). Wird mit U die potentielle und mit T die kinetische Energie des schwingenden Stabes bezeichnet, so verlangt das *Hamiltons*che Prinzip, daß das Zeitintegral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

stationär wird. Während eines beliebigen Schwingungszustandes beträgt die potentielle Energie

$$U_{ges} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EJ^z(x) \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + EJ^y(x) \left(\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + GT(x) \left(\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx .$$

Die Rotation der Stabelemente erfolgt um die elastische Achse. Diese ist identisch mit der Verbindungslinie der Querkraftmittelpunkte aller Stabquerschnitte. Mit den beiden Komponenten der Schwerpunktgeschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} v^y &= \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + s(x) \frac{\partial [\alpha(x,t) \cos(\beta - \alpha(x,t))]}{\partial t} , \\ v^z &= \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} - s(x) \frac{\partial [\alpha(x,t) \sin(\beta - \alpha(x,t))]}{\partial t} \end{aligned}\right| \qquad (2.1)$$

[1] *H. Wittmeyer*, Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen und -formen von Flügeln. Jb. dtsch. Luftf. 1 (1939), S. 505.

[2] Gekürzte Fassung einer von der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation 1949 (D 89); Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. *O. Flachsbart*; Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*.

ergibt sich für die gesamte kinetische Energie

$$T_{ges} = \frac{1}{2}\int_0^l \Big\{\mu(x)\Big[\Big(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + s(x)\,\frac{\partial[\alpha(x,t)\cos(\beta-\alpha(x,t))]}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} - s(x)\,\frac{\partial[\alpha(x,t)\sin(\beta-\alpha(x,t))]}{\partial t}\Big)^2\Big] + \Theta_s(x)\Big(\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial t}\Big)^2\Big\}\,dx\,.$$

Im Bereich kleiner Auslenkungen verschwindet die Größe $\alpha(x,t)$ in den beiden trigonometrischen Gliedern; denn das Produkt $\alpha(x,t)\,\partial\alpha(x,t)/\partial t$ führt bei einem harmonischen Ansatz $\alpha = \alpha_0 \sin\omega t$ auf $1/2\alpha_0^2\,\omega \sin 2\omega t$ und darf somit als Ausdruck zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Beide Energieformen, in das *Hamilton*sche Integral eingesetzt, ergeben

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \Big\{\mu(x)\,[(y_t(x,t))^2 + 2\,s^z(x)\,y_t(x,t)\,\alpha_t(x,t) + (z_t(x,t))^2 - 2\,s^y(x)\,z_t(x,t)\,\alpha_t(x,t)] + \Theta_Q(x)\,(\alpha_t(x,t))^2 - EJ^z(x)\,(y_{xx}(x,t))^2 - EJ^y(x)\,(z_{xx}(x,t))^2 - GT(x)\,(\alpha_x(x,t))^2\Big\}\,dx\,dt = \text{stat}. \tag{2,2}$$

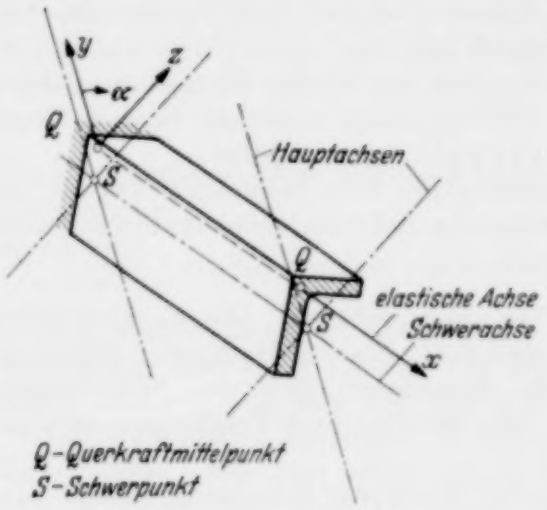

Abb. 1a. Eingespannter Stab.

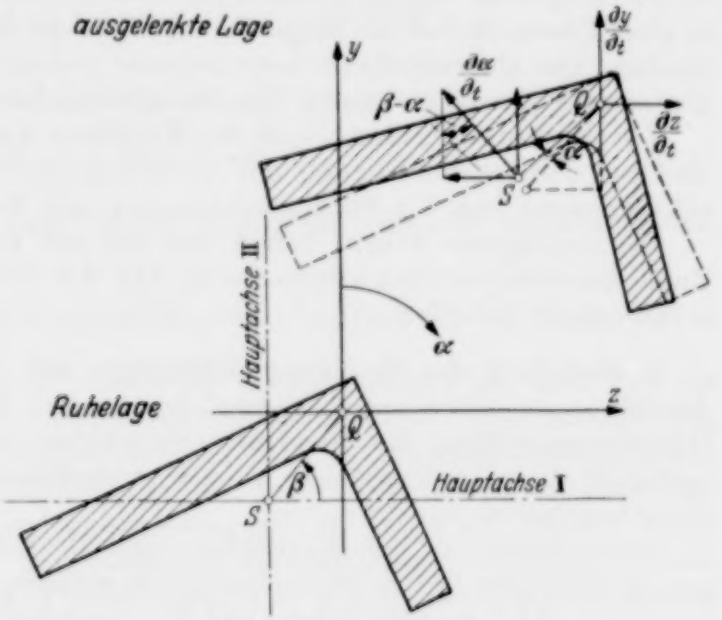

Abb. 1b. Schwingender Stab.

Hierin bedeuten die Fußzeiger x und t partielle Ableitungen nach x und t; ferner ist $s^z(x) = s(x)\cos\beta$, $s^y(x) = s(x)\sin\beta$ und $\Theta_Q(x) = \Theta_s(x) + \mu(x)\,s^2(x)$.

Das Variationsintegral (2,2) enthält drei Koordinatenfunktionen $y(x,t)$, $z(x,t)$ und $\alpha(x,t)$, die einzeln so beschaffen sein müssen, daß die Forderung $J =$ stationär gewährleistet ist. Die zugehörigen *Euler*schen Differentialgleichungen[1] lauten

$$[EJ^z(x)\,y_{xx}(x,t)]_{xx} + \mu(x)\,y_{tt}(x,t) + \mu(x)\,s^z(x)\,\alpha_{tt}(x,t) = 0\,, \tag{2,3}$$

$$[EJ^y(x)\,z_{xx}(x,t)]_{xx} + \mu(x)\,z_{tt}(x,t) - \mu(x)\,s^y(x)\,\alpha_{tt}(x,t) = 0\,, \tag{2,4}$$

$$[GT(x)\,\alpha_x(x,t)]_x - \Theta_Q(x)\,\alpha_{tt}(x,t) - \mu(x)\,s^z(x)\,y_{tt}(x,t) + \mu(x)\,s^y(x)\,z_{tt}(x,t) = 0\,. \tag{2,5}$$

Da Dämpfungseinflüsse unberücksichtigt bleiben, schwingen alle Teilchen des Stabes synchron und das *Hamilton*sche Integral kann nach Einführung der Ansätze für die harmonische Schwingung nach der Zeit t ausgewertet werden.

Mit der dimensionslosen Längskoordinate $\xi = \frac{x}{l}$, den Amplitudenfunktionen $Y(\xi)$, $Z(\xi)$ und $\alpha^*(\xi)$ und der Kreisfrequenz ω lauten die Ansätze

$$y(\xi,t) = Y(\xi)\sin\omega t,\quad z(\xi,t) = Z(\xi)\sin\omega t,\quad \alpha(\xi,t) = \alpha^*(\xi)\sin\omega t\,.$$

[1] *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der mathem. Phys. I., S. 164. 2. Auflage. Berlin 1931.

Nach üblichem Rechnungsgang ergibt sich das Variationsintegral

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \{\omega^2 [\mu(\xi)(Y^2(\xi) + 2 s^z(\xi) Y(\xi)\alpha^*(\xi) + Z^2(\xi) - 2 s^y(\xi) Z(\xi)\alpha^*(\xi)) + \Theta_Q(\xi)\alpha^{*2}(\xi)] -$$
$$- B^z(\xi)(Y''(\xi))^2 - B^y(\xi)(Z''(\xi))^2 - D(\xi)(\alpha^{*\prime}(\xi))^2\}\, d\xi = \text{stat.} \qquad (2{,}6)$$

mit den entsprechenden *Euler*schen Differentialgleichungen

$$[B^z(\xi) Y''(\xi)]'' - \omega^2\mu(\xi) Y(\xi) - \omega^2\mu(\xi) s^z(\xi)\alpha^*(\xi) = 0\,, \qquad (2{,}7)$$

$$[B^y(\xi) Z''(\xi)]'' - \omega^2\mu(\xi) Z(\xi) + \omega^2\mu(\xi) s^y(\xi)\alpha^*(\xi) = 0\,, \qquad (2{,}8)$$

$$[D(\xi)\alpha^{*\prime}(\xi)]' + \omega^2\Theta_Q(\xi)\alpha^*(\xi) + \omega^2\mu(\xi) s^z(\xi) Y(\xi) - \omega^2\mu(\xi) s^y(\xi) Z(\xi) = 0\,. \qquad (2{,}9)$$

Hierin bedeuten die Größen $B^y(\xi) = EJ^y(\xi)/l^4$, $B^z(\xi) = EJ^z(\xi)/l^4$ reduzierte Biegesteifigkeiten bezüglich der zur y- bzw. z-Achse parallelen Hauptträgheitsachsen, $D(\xi) = GT(\xi)/l^2$ reduzierte Torsionssteifigkeit und Striche Ableitungen nach ξ.

3. Lösung des Variationsproblems mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens. Stimmt die elastische Achse mit der Schwerachse überein, so verschwinden im Variationsintegral und in den Differentialgleichungen die sog. Kopplungsglieder. Die Schwingungen der drei Freiheitsgrade y, z, α werden unabhängig voneinander und können für sich berechnet werden. Sie heißen „entkoppelte" oder „freie" Biege- bzw. Torsionseigenschwingungen und die zugehörigen Eigenfunktionen „freie" Eigenfunktionen. Entsprechendes gilt für die Eigenfrequenzen.

Es liegt die Vermutung nahe, daß diese „entkoppelten" Schwingungsformen besonders gute Näherungsansätze für die *Ritz*sche Rechnung darstellen, da die Kopplungseffekte nur eine mehr oder weniger starke Störung der freien Schwingungen bedeuten. Deshalb werden an Stelle der vorderhand unbekannten Lösungsfunktionen der Variationsaufgabe für alle drei Funktionen $Y(\xi)$, $Z(\xi)$, $\alpha^*(\xi)$ Linearentwicklungen nach freien Eigenfunktionen der ersten, zweiten, dritten usw. Ordnung angesetzt. Bereitet im Falle veränderlicher Massenbelegung sowie veränderlicher Biege- und Torsionssteifigkeiten eine exakte Berechnung der freien Schwingungsformen zu große Schwierigkeiten, so sind rechnerische oder graphische Näherungsverfahren heranzuziehen[1].

Die Näherungsansätze enthalten frei verfügbare Parameter, die durch die Rechnung so bestimmt werden, daß die Forderung (2,6) erfüllt wird. Hierdurch entsteht ein lineares homogenes Gleichungssystem, dessen Koeffizientendeterminante verschwinden muß. Diese Bedingung liefert obere Schranken für die exakten Eigenwerte. Zwecks Unterscheidung werden die Näherungswerte überstrichen.

a) Allgemeiner Fall des stetig veränderlichen und beliebigen Stabquerschnittes. Für die Amplitudenfunktionen $Y(\xi)$, $Z(\xi)$ und $\alpha^*(\xi)$ werden zweiparametrige Näherungsfunktionen angesetzt. Diese brauchen vorerst weder orthogonalisiert noch normiert zu sein, sondern müssen nach *H. Wittmeyer*[1] lediglich die wesentlichen Randbedingungen erfüllen:

$$Y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2\,, \quad Z = b_1 Z_1 + b_2 Z_2\,, \quad \alpha^* = c_1\alpha_1^* + c_2\alpha_2^*\,. \qquad (3{,}1)$$

Mit diesen Ansätzen werden die einzelnen Anteile des Variationsintegrals (2,6) berechnet. Aus den Bedingungen

$$\frac{\partial J(a,b,c)}{\partial a_1} = 0\,, \quad \frac{\partial J(a,b,c)}{\partial a_2} = 0\,, \quad \frac{\partial J(a,b,c)}{\partial b_1} = 0\,, \quad \frac{\partial J(a,b,c)}{\partial b_2} = 0\,,$$
$$\frac{\partial J(a,b,c)}{\partial c_1} = 0\,, \quad \frac{\partial J(a,b,c)}{\partial c_2} = 0\,,$$

entstehen sechs lineare homogene Gleichungen mit der Koeffizientendeterminanten-Gleichung I.

---

[1] *H. Wittmeyer*, Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen und -formen von Flügeln. Jb. dtsch. Luftf. 1 (1939), S. 505; *L. Collatz*, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, 2. Auflage. Leipzig 1949.

Koeffizientendeterminante I.

$$\vartheta_I = \begin{vmatrix}
\bar\omega^2\int_0^1 \mu Y_1^2\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \mu Y_1 Y_2\,d\xi & 0 & 0 & +\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_1\alpha_1^*\,d\xi & +\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_1\alpha_2^*\,d\xi \\
-\int_0^1 B^z (Y_1'')^2\,d\xi & -\int_0^1 B^z Y_1'' Y_2''\,d\xi & & & & \\
\bar\omega^2\int_0^1 \mu Y_2 Y_1\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \mu Y_2^2\,d\xi & 0 & 0 & +\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_2\alpha_1^*\,d\xi & +\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_2\alpha_2^*\,d\xi \\
-\int_0^1 B^z Y_2'' Y_1''\,d\xi & -\int_0^1 B^z (Y_2'')^2\,d\xi & & & & \\
0 & 0 & \bar\omega^2\int_0^1 \mu Z_1^2\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \mu Z_1 Z_2\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_1\alpha_1^*\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_1\alpha_2^*\,d\xi \\
 & & -\int_0^1 B^y (Z_1'')^2\,d\xi & -\int_0^1 B^y Z_1'' Z_2''\,d\xi & & \\
0 & 0 & \bar\omega^2\int_0^1 \mu Z_2 Z_1\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \mu Z_2^2\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_2\alpha_1^*\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_2\alpha_2^*\,d\xi \\
 & & -\int_0^1 B^y Z_2'' Z_1''\,d\xi & -\int_0^1 B^y (Z_2'')^2\,d\xi & & \\
+\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_1\alpha_1^*\,d\xi & +\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_2\alpha_1^*\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_1\alpha_1^*\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_2\alpha_1^*\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \Theta_Q \alpha_1^{*2}\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \Theta_Q \alpha_1^*\alpha_2^*\,d\xi \\
 & & & & -\int_0^1 D(\alpha_1^{*\prime})^2\,d\xi & -\int_0^1 D\alpha_1^{*\prime}\alpha_2^{*\prime}\,d\xi \\
+\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_1\alpha_2^*\,d\xi & +\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^z \cdot Y_2\alpha_2^*\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_1\alpha_2^*\,d\xi & -\bar\omega^2\int_0^1 \mu s^y \cdot Z_2\alpha_2^*\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \Theta_Q \alpha_2^*\alpha_1^*\,d\xi & \bar\omega^2\int_0^1 \Theta_Q \alpha_2^{*2}\,d\xi \\
 & & & & -\int_0^1 D\alpha_2^{*\prime}\cdot\alpha_1^{*\prime}\,d\xi & -\int_0^1 D(\alpha_2^{*\prime})^2\,d\xi
\end{vmatrix} = 0$$

Bei η-, ϑ- und ζ-parametrigen Funktionsansätzen ergibt sich die Determinanten-Gleichung II von $(\eta+\vartheta+\zeta)$-facher Ordnung. Sie liefert $\eta+\vartheta+\zeta$ reelle und positive Eigenwerte und kann als allgemeine Lösung des vorliegenden Schwingungsproblems angesehen werden. Bei entsprechenden Ansätzen lassen sich alle Eigenwerte und Eigenfunktionen mit beliebiger Genauigkeit ermitteln, wobei allerdings mit steigender Ordnung der Rechenaufwand rasch anwächst. Die Bedeutung der einzelnen Glieder ist durch Vergleich mit den Elementen der Determinante I für $\eta=\vartheta=\zeta=2$ leicht zu erkennen.

b) Sonderfall der prismatischen Stäbe mit konstantem, aber beliebigem Querschnitt. 1. Herleitung der freien Eigenfunktionen für die Biege- und Torsionsschwingungen (kurzer Abriß der Theorie). Die Biegeschwingungen genannter Stäbe werden bekanntlich durch die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$E J^z \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{3,2}$$

und die Torsionsschwingungen durch die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$G T \frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial x^2} - \Theta_s \frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{3,3}$$

beschrieben. Mit

$$\xi = \frac{x}{l}, \qquad (k^y)^4 = \frac{(\omega^y)^2\,\mu\,l^4}{E J^z}, \qquad (k^\alpha)^2 = \frac{(\omega^\alpha)^2\,\Theta_s\,l^2}{G T} \tag{3,4}$$

Koeffizientendeterminante II.

$$\bar{\vartheta}_{II}=\begin{vmatrix}
\Psi^{y}_{11} & \Psi^{y}_{12} & \cdots & \Psi^{y}_{1\eta} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Gamma^{*y}_{11} & \Gamma^{*y}_{12} & \cdots & \Gamma^{*y}_{1\zeta} \\
\Psi^{y}_{21} & \Psi^{y}_{22} & \cdots & \Psi^{y}_{2\eta} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Gamma^{*y}_{21} & \Gamma^{*y}_{22} & \cdots & \Gamma^{*y}_{2\zeta} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\Psi^{y}_{\eta 1} & \Psi^{y}_{\eta 2} & \cdots & \Psi^{y}_{\eta\eta} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Gamma^{*y}_{\eta 1} & \Gamma^{*y}_{\eta 2} & \cdots & \Gamma^{*y}_{\eta\zeta} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \Psi^{z}_{11} & \Psi^{z}_{12} & \cdots & \Psi^{z}_{1\vartheta} & \Gamma^{*z}_{11} & \Gamma^{*z}_{12} & \cdots & \Gamma^{*z}_{1\zeta} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \Psi^{z}_{21} & \Psi^{z}_{22} & \cdots & \Psi^{z}_{2\vartheta} & \Gamma^{*z}_{21} & \Gamma^{*z}_{22} & \cdots & \Gamma^{*z}_{2\zeta} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \Psi^{z}_{\vartheta 1} & \Psi^{z}_{\vartheta 2} & \cdots & \Psi^{z}_{\vartheta\vartheta} & \Gamma^{*z}_{\vartheta 1} & \Gamma^{*z}_{\vartheta 2} & \cdots & \Gamma^{*z}_{\vartheta\zeta} \\
\Gamma^{*y}_{11} & \Gamma^{*y}_{21} & \cdots & \Gamma^{*y}_{\eta 1} & \Gamma^{*z}_{11} & \Gamma^{*z}_{21} & \cdots & \Gamma^{*z}_{\vartheta 1} & \Psi^{\alpha}_{11} & \Psi^{\alpha}_{12} & \cdots & \Psi^{\alpha}_{1\zeta} \\
\Gamma^{*y}_{12} & \Gamma^{*y}_{22} & \cdots & \Gamma^{*y}_{\eta 2} & \Gamma^{*z}_{12} & \Gamma^{*z}_{22} & \cdots & \Gamma^{*z}_{\vartheta 2} & \Psi^{\alpha}_{21} & \Psi^{\alpha}_{22} & \cdots & \Psi^{\alpha}_{2\zeta} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\Gamma^{*y}_{1\zeta} & \Gamma^{*y}_{2\zeta} & \cdots & \Gamma^{*y}_{\eta\zeta} & \Gamma^{*z}_{1\zeta} & \Gamma^{*z}_{2\zeta} & \cdots & \Gamma^{*z}_{\vartheta\zeta} & \Psi^{\alpha}_{\zeta 1} & \Psi^{\alpha}_{\zeta 2} & \cdots & \Psi^{\alpha}_{\zeta\zeta}
\end{vmatrix}=0$$

und den Zeigern n bzw. m zur Kennzeichnung der laufenden Ordnung lauten die allgemeinen Lösungen in einer für die Koeffizientenermittlung günstigen Form

$$\left.\begin{aligned} y_0(\xi)_n = C_1(\cos k_n^{y}\xi + \mathfrak{Cof}\, k_n^{y}\xi) + C_2(\cos k_n^{y}\xi - \mathfrak{Cof}\, k_n^{y}\xi) + C_3(\sin k_n^{y}\xi + \mathfrak{Sin}\, k_n^{y}\xi) \\ + C_4(\sin k_n^{y}\xi - \mathfrak{Sin}\, k_n^{y}\xi)\,, \end{aligned}\right| \tag{3,5}$$

$$\alpha_0(\xi)_m = D_1 \sin k_m^{\alpha}\xi + D_2 \cos k_m^{\alpha}\xi\,. \tag{3,6}$$

Die Koeffizienten ergeben sich durch Anpassung dieser allgemeinen Eigenfunktionen an die Randbedingungen. Durch eine zweckentsprechende Wahl des Bezugskoeffizienten werden die Eigenfunktionen normiert, so daß die einzelnen Integrale der Determinante I einfache Werte annehmen. Wegen der Orthogonalität ist

$$\int_0^1 Y_n(\xi)\,Y_i(\xi)\,d\xi = 0\,, \qquad \int_0^1 Y_n''(\xi)\,Y_i''(\xi)\,d\xi = 0 \qquad \text{für } n \neq i\,,$$

$$\int_0^1 \alpha_m(\xi)\,\alpha_k(\xi)\,d\xi = 0\,, \qquad \int_0^1 \alpha_m'(\xi)\,\alpha_k'(\xi)\,d\xi = 0 \qquad \text{für } m \neq k$$

und nach *S. Timoshenko*[1] weiterhin

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 (Y_n(\xi))^2\,d\xi = \frac{1}{4\,(k_n^y)^4}\left[(k_n^y)^4\,(Y_n(1))^2 - 2\,Y_n'''(1)\,Y_n'(1) + (Y_n''(1))^2\right],\\
&\int_0^1 (Y_n''(\xi))^2\,d\xi = (k_n^y)^4\int_0^1 (Y_n(\xi))^2\,d\xi = \frac{1}{4}\left[(k_n^y)^4\,(Y_n(1))^2 - 2\,Y_n'''(1)\,Y_n'(1) + (Y_n''(1))^2\right],\\
&\int_0^1 (\alpha_m^*(\xi))^2\,d\xi = \frac{1}{2\,(k_m^x)^2}\left[(k_m^x)^2\,(\alpha_m^*(1))^2 + (\alpha_m^{*\prime}(1))^2\right],\\
&\int_0^1 (\alpha_m^{*\prime}(\xi))^2\,d\xi = (k_m^x)^2\int_0^1 (\alpha_m^*(\xi))^2\,d\xi = \frac{1}{2}\left[(k_m^x)^2\,(\alpha_m^*(1))^2 + (\alpha_m^{*\prime}(1))^2\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (3{,}7)$$

Alle Integrale der Gestalt

$$\int_0^1 Y_n(\xi)\,\alpha_m^*(\xi)\,d\xi = I_{nm}^{yy}, \qquad \int_0^1 Z_n(\xi)\,\alpha_m^*(\xi)\,d\xi = I_{nm}^{zx}$$

haben die Bedeutung von Kopplungsfaktoren zwischen Biege- und Torsionsschwingungen.

Für die ersten drei untersuchten Lagerungsfälle (s. Tabelle 1) zeigen die Eigenfunktionen der Biege- und Torsionsschwingungen gleichen Aufbau. Folglich kann hierfür eine gemeinsame Gleichung der Kopplungsfaktoren angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 Y_n(\xi)\,\alpha_m^*(\xi)\,d\xi = I_{nm}^{yy} = \beta_n^y\Bigg[&\frac{-k_n^y\cos k_n^y\sin k_m^x + k_m^x\sin k_n^y\cos k_m^x}{(k_n^y)^2-(k_m^x)^2} -\\
&-\frac{k_n^y\,\mathfrak{Cof}\,k_n^y\sin k_m^x - k_m^x\,\mathfrak{Sin}\,k_n^y\cos k_m^x}{(k_n^y)^2+(k_m^x)^2} + \frac{k_m^x\cos k_m^x\cos k_n^y + k_n^y\sin k_m^x\sin k_n^y - k_m^x}{(k_n^y)^2-(k_m^x)^2} -\\
&-\frac{-k_m^x\cos k_m^x\,\mathfrak{Cof}\,k_n^y + k_n^y\sin k_m^x\,\mathfrak{Sin}\,k_n^y + k_m^x}{(k_n^y)^2+(k_m^x)^2}\Bigg] \qquad \text{für } k_n^y \neq k_m^x.
\end{aligned}\right\} \qquad (3{,}8)$$

Für den vierten Einspannungsfall „unterstützt—unterstützt" gilt

$$\left.\begin{aligned}
I_{nm}^{yy} &= \frac{-k_n^y\cos k_n^y\cos k_m^x - k_m^x\sin k_n^y\sin k_m^x + k_n^y}{(k_n^y)^2-(k_m^x)^2} && \text{für } k_n^y \neq k_m^x\\
\text{und}&\\
I_{nm}^{yy} &= \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 k_n^y}{k_n^y} && \text{für } k_n^y = k_m^x.
\end{aligned}\right\} \qquad (3{,}9)$$

Die Herleitung dieser Gleichungen ist trivial und kann im Original der Arbeit nachgelesen werden.

Da die Eigenwerte k_n^y und k_n^z der beiden freien Biegeschwingungen gleich sind, gilt $I_{nm}^{yy} = I_{nm}^{zz}$. Eine Unterscheidung durch die beiden Zeiger y, z ist nicht unbedingt notwendig, aber wegen der guten Übersicht zweckmäßig.

Die in Tabelle 1 angegebenen numerischen Werte der Kopplungsfaktoren umfassen nur die Kombinationen zwischen Biege- und Torsionsschwingungen der ersten beiden Ordnungen. Wird für spezielle Untersuchungen eine größere Genauigkeit des *Ritz*schen Verfahrens gewünscht, so lassen sich ohne größere Mühe auch die Kopplungsfaktoren höherer Schwingungsordnungen aus (3,8) bestimmen. In den meisten Fällen jedoch werden die Angaben der Tabelle 1 ausreichen.

[1] *S. Timoshenko*. Schwingungsprobleme der Technik, S. 250. Berlin 1932.

Tabelle 1.

	a — Stab, einseitig eingespannt, anderseitig frei	b — Stab, beidseitig eingespannt.	c — Stab, einseitig eingespannt, anderseitig unterstützt (bzw. frei f. d. Torsionsschwingung)	d — Stab, beidseitig unterstützt (bzw. beidseitig frei für die Torsionsschwingung)
Randbedingungen	$Y(0)=Y'(0)=Y''(1)=Y'''(1)=0$; $\alpha(0)=\alpha'(1)=0$; $Y(\xi)_n=\frac{y_0(\xi)_n}{C_2}$; $\alpha^*(\xi)_m=\frac{\alpha_0(\xi)_m}{D_1}$	$Y(0)=Y'(0)=Y(1)=Y'(1)=0$; $\alpha^*(0)=\alpha^*(1)=0$; $Y(\xi)_n=\frac{y_0(\xi)_n}{C_2}$; $\alpha^*(\xi)_m=\frac{\alpha_0(\xi)_m}{D_1}$	$Y(0)=Y'(0)=Y(1)=Y''(1)=0$; $\alpha^*(0)=\alpha^{*\prime}(1)=0$; $Y(\xi)_n=\frac{y_0(\xi)_n}{C_2}$; $\alpha^*(\xi)_m=\frac{\alpha_0(\xi)_m}{D_1}$	$Y(0)=Y''(0)=Y(1)=Y''(1)=0$; $\alpha^{*\prime}(0)=\alpha^{*\prime}(1)=0$; $Y(\xi)_n=\frac{y_0(\xi)_n}{C_3}$; $\alpha^*(\xi)_m=\frac{\alpha_0(\xi)_m}{D_2}$
Biegeschwingung Frequenzgleichungen Torsionsschwingung	$\cos k_n^y\cdot\mathfrak{Cof}\,k_n^y=-1$; $\cos k_m^\alpha=0$	$\cos k_n^y\cdot\mathfrak{Cof}\,k_n^y=1$; $\sin k_m^\alpha=0$	$\operatorname{tg} k_n^y=\mathfrak{Tg}\,k_n^y\cdot$; $\cos k_m^\alpha=0$	$\sin k_n^y=0$; $\sin k_m^\alpha=0$
Eigenwerte	$k_1^y=1.87510$, $k_2^y=4.69409$, $k_3^y=7.85476$ usw.; $k_1^\alpha=\frac{\pi}{2}$, $k_2^\alpha=\frac{3\pi}{2}$, $k_3^\alpha=\frac{5\pi}{2}$ usw.	$k_1^y=4.73004$, $k_2^y=7.85045$, $k_3^y=10.9956$ usw.; $k_1^\alpha=\pi$, $k_2^\alpha=2\pi$, $k_3^\alpha=3\pi$ usw.	$k_1^y=3.92608$, $k_2^y=7.06855$, $k_3^y=10.2092$ usw.; $k_1^\alpha=\frac{\pi}{2}$, $k_2^\alpha=\frac{3\pi}{2}$, $k_3^\alpha=\frac{5\pi}{2}$ usw.	$k_1^y=\pi$, $k_2^y=2\pi$, $k_3^y=3\pi$ usw.; $k_1^\alpha=\pi$, $k_2^\alpha=2\pi$, $k_3^\alpha=3\pi$ usw.
Eigenfunktionen	$Y(\xi)_n=\beta_n^y(\sin k_n^y\xi-\mathfrak{Sin}\,k_n^y\xi)+\cos k_n^y\xi-\mathfrak{Cof}\,k_n^y\xi$; $\alpha^*(\xi)_m=\sin k_m^\alpha\xi$	$Y(\xi)_n=\beta_n^y(\sin k_n^y\xi-\mathfrak{Sin}\,k_n^y\xi)+\cos k_n^y\xi-\mathfrak{Cof}\,k_n^y\xi$; $\alpha^*(\xi)_m=\sin k_m^\alpha\xi$	$Y(\xi)_n=\beta_n^y(\sin k_n^y\xi-\mathfrak{Sin}\,k_n^y\xi)+\cos k_n^y\xi-\mathfrak{Cof}\,k_n^y\xi$; $\alpha^*(\xi)_m=\sin k_m^\alpha\xi$	$Y(\xi)_n=\beta_n^y\sin k_n^y\xi=\sin k_n^y\xi$; $\alpha^*(\xi)_m=\cos k_m^\alpha\xi$
Koeffizientenverhältnis in der Eigenfunktion der Biegeschwingungen	$\beta_n^y=\frac{C_4}{C_2}=\frac{\sin k_n^y}{\cos k_n^y+1}$ (Das Minuszeichen gilt für Eigenfunktionen ungerader und das Pluszeichen für Eigenfunktionen gerader Ordnung.); $\beta_1^y=-0{,}73410$; $\beta_2^y=-1{,}01845$	$\beta_n^y=\frac{C_4}{C_2}=\frac{\sin k_n^y}{\cos k_n^y-1}$ (Das Minuszeichen gilt für Eigenfunktionen gerader und das Pluszeichen für Eigenfunktionen ungerader Ordnung.); $\beta_1^y=-0{,}98250$; $\beta_2^y=-1{,}00354$	$\beta_n^y=\frac{C_4}{C_2}=-\operatorname{ctg} k_n^y$; $\beta_1^y=-1{,}00178$; $\beta_2^y=-1{,}00004$	
$\int_0^1(Y(\xi)_n)^2d\xi$	1	1	1	$\frac{1}{2}$
$\int_0^1(Y(\xi)_n'')^2d\xi$	$(k_n^y)^4$	$(k_n^y)^4$	$(k_n^y)^4$	$\frac{1}{2}(k_n^y)^4$
$\int_0^1(\alpha(\xi)_m)^2d\xi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\int_0^1(\alpha(\xi)_m')^2d\xi$	$\frac{1}{2}(k_m^\alpha)^2$	$\frac{1}{2}(k_m^\alpha)^2$	$\frac{1}{2}(k_m^\alpha)^2$	$\frac{1}{2}(k_m^\alpha)^2$
Kopplungsfaktoren $\int_0^1 Y(\xi)_n\alpha(\xi)_m d\xi=\Gamma_{nm}^y$	$\Gamma_{11}^y=-0{,}67785$ $(\Gamma_{11}^y)^2=0{,}45948$; $\Gamma_{12}^y=+0{,}19608$ $(\Gamma_{12}^y)^2=0{,}038449$; $\Gamma_{21}^y=-0{,}19407$ $(\Gamma_{21}^y)^2=0{,}037663$; $\Gamma_{22}^y=-0{,}61114$ $(\Gamma_{22}^y)^2=0{,}37350$	$\Gamma_{11}^y=-0{,}69738$ $(\Gamma_{11}^y)^2=0{,}48633$; $\Gamma_{12}^y=0$ $(\Gamma_{12}^y)^2=0$; $\Gamma_{21}^y=0$ $(\Gamma_{21}^y)^2=0$; $\Gamma_{22}^y=-0{,}69159$ $(\Gamma_{22}^y)^2=0{,}47829$	$\Gamma_{11}^y=-0{,}63199$ $(\Gamma_{11}^y)^2=0{,}39941$; $\Gamma_{12}^y=-0{,}25268$ $(\Gamma_{12}^y)^2=0{,}063846$; $\Gamma_{21}^y=+0{,}15090$ $(\Gamma_{21}^y)^2=0{,}022771$; $\Gamma_{22}^y=-0{,}59782$ $(\Gamma_{22}^y)^2=0{,}35739$	$\Gamma_{11}^y=0$ $(\Gamma_{11}^y)^2=0$; $\Gamma_{12}^y=-0{,}21221$ $(\Gamma_{12}^y)^2=0{,}045032$; $\Gamma_{21}^y=+0{,}42441$ $(\Gamma_{21}^y)^2=0{,}18013$; $\Gamma_{22}^y=0$ $(\Gamma_{22}^y)^2=0$

2. **Dreierkopplung.** Für die Amplitudenfunktion $Z(\xi)$ gelten die analogen Aussagen wie für $Y(\xi)$. Bei konstantem Querschnitt, unveränderlicher Massenbelegung und den in der Tabelle 1 angegebenen Lösungen der Integrale (3,7) ergibt sich aus der Determinante I nach einigen Umformungen die Determinante III. Durch geeignete Spalten- und Zeilenadditionen

Koeffizientendeterminante III.

$$\bar{\vartheta}_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix}
\dfrac{1}{\cos^2\beta} - \dfrac{B^2(k_1^y)^4}{\bar{\omega}^2\mu\cos^2\beta} & 0 & 0 & 0 & +\Gamma_{11}^y & +\Gamma_{12}^y \\
0 & \dfrac{1}{\cos^2\beta} - \dfrac{B^2(k_2^y)^4}{\bar{\omega}^2\mu\cos^2\beta} & 0 & 0 & +\Gamma_{21}^y & +\Gamma_{22}^y \\
0 & 0 & \dfrac{1}{\sin^2\beta} - \dfrac{B^y(k_1^z)^4}{\bar{\omega}^2\mu\sin^2\beta} & 0 & -\Gamma_{11}^z & -\Gamma_{12}^z \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sin^2\beta} - \dfrac{B^y(k_2^z)^4}{\bar{\omega}^2\mu\sin^2\beta} & -\Gamma_{21}^z & -\Gamma_{22}^z \\
+\Gamma_{11}^y & +\Gamma_{21}^y & -\Gamma_{11}^z & -\Gamma_{21}^z & \dfrac{\Theta_Q}{2\mu s^2} - \dfrac{D(k_1^x)^2}{2\bar{\omega}^2\mu s^2} & 0 \\
+\Gamma_{12}^y & +\Gamma_{22}^y & -\Gamma_{12}^z & -\Gamma_{22}^z & 0 & \dfrac{\Theta_Q}{2\mu s^2} - \dfrac{D(k_2^x)^2}{2\bar{\omega}^2\mu s^2}
\end{vmatrix} = 0$$

gelingt eine übersichtliche Darstellung der Determinanten-Gleichung, die sich für die Zahlenrechnung besonders gut eignet:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\vartheta}_{\mathrm{III}} = A\,B\,C\,D \Bigg| \Bigg[E - \frac{(\Gamma_{11}^y)^2}{A} - \frac{(\Gamma_{21}^y)^2}{B} - \frac{(\Gamma_{11}^z)^2}{C} - \frac{(\Gamma_{21}^z)^2}{D} \Bigg] \\
\Bigg[F - \frac{(\Gamma_{12}^y)^2}{A} - \frac{(\Gamma_{22}^y)^2}{B} - \frac{(\Gamma_{12}^z)^2}{C} - \frac{(\Gamma_{22}^z)^2}{D} \Bigg] - \\
- \left| \frac{\Gamma_{11}^y\,\Gamma_{12}^y}{A} + \frac{\Gamma_{21}^y\,\Gamma_{22}^y}{B} + \frac{\Gamma_{11}^z\,\Gamma_{12}^z}{C} + \frac{\Gamma_{21}^z\,\Gamma_{22}^z}{D} \right|^2 \Bigg| = 0 \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3{,}10)$$

Hierin bedeuten

$$A = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{B^2(k_1^y)^4}{\bar{\omega}^2\mu\cos^2\beta}\,, \quad B = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{B^2(k_2^y)^4}{\bar{\omega}^2\mu\cos^2\beta}\,, \quad C = \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{B^y(k_1^z)^4}{\omega^2\mu\sin^2\beta}\,,$$

$$D = \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{B^y(k_2^z)^4}{\bar{\omega}^2\mu\sin^2\beta}\,, \quad E = \frac{\Theta_Q}{2\mu s^2} - \frac{D(k_1^x)^2}{2\bar{\omega}^2\mu s^2}\,, \quad F = \frac{\Theta_Q}{2\mu s^2} - \frac{D(k_2^x)^2}{2\bar{\omega}^2\mu s^2}$$

mit $\Gamma_{nm}^v = \Gamma_{nm}^z$ und $k_n^y = k_n^z$. Die Gleichung (3,10) gilt für die ersten drei Lagerungsfälle „eingespannt—frei", „eingespannt—eingespannt", „eingespannt—unterstützt", während für den vierten und letzten Fall „unterstützt—unterstützt" nur die halben Werte der Glieder A bis D in Rechnung zu setzen sind. Ihre sechs Nullstellen, die am einfachsten durch Probieren und Interpolieren gefunden werden, bilden obere Schranken für die unteren sechs Kopplungseigenfrequenzen.

Die Ermittlung der *Ritz*-Parameter erfolgt nach bekannter Methode. Mit z. B. a_1 als Bezugsgröße ergibt sich für die restlichen Parameter

$$a_2 = \frac{\bar{\vartheta}_{a_2}}{\bar{\vartheta}_N}, \quad b_1 = \frac{\bar{\vartheta}_{b_1}}{\bar{\vartheta}_N}, \quad b_2 = \frac{\bar{\vartheta}_{b_2}}{\bar{\vartheta}_N}, \quad c_1 = \frac{\bar{\vartheta}_{c_1}}{\bar{\vartheta}_N}, \quad c_2 = \frac{\bar{\vartheta}_{c_2}}{\bar{\vartheta}_N}.$$

Die Nennerdeterminante $\bar{\vartheta}_N$ entsteht aus der Frequenzdeterminante III durch Fortfall der ersten Spalte und ersten Zeile. Aus ihr ergeben sich die Zählerdeterminanten $\bar{\vartheta}_{a_2}$, $\bar{\vartheta}_{b_1}$, $\bar{\vartheta}_{b_2}$, $\bar{\vartheta}_{c_1}$, $\bar{\vartheta}_{c_2}$, wenn die entsprechende Spalte der Nennerdeterminante gegen die mit a_1 multiplizierte fortgefallene erste Spalte (ohne das erste Glied) vertauscht wird. Nach elementaren Zwischenrechnungen wird

$$\bar{\vartheta}_N = BCD\cos^2\beta\sin^4\beta\, s^4 \left\{\left[E - \frac{(\Gamma^y_{21})^2}{B} - \frac{(\Gamma^z_{11})^2}{C} - \frac{(\Gamma^z_{21})^2}{D}\right]\left[F - \frac{(\Gamma^y_{22})^2}{B} - \frac{(\Gamma^z_{12})^2}{C} - \frac{(\Gamma^z_{22})^2}{D}\right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{\Gamma^y_{21}\Gamma^y_{22}}{B} + \frac{\Gamma^z_{11}\Gamma^z_{12}}{C} + \frac{\Gamma^z_{21}\Gamma^z_{22}}{D}\right]^2\right\}, \tag{3,11}$$

$$\bar{\vartheta}_{a_2} = a_1\cos^2\beta\sin^4\beta\, s^4\, C\, D\,[E\,\Gamma^y_{12}\Gamma^y_{22} + F\Gamma^y_{11}\Gamma^y_{21}], \tag{3,12}$$

$$\bar{\vartheta}_{b_1} = -\,a_1\cos^3\beta\sin^3\beta\, s^4\, B\, D\left[E(\Gamma^y_{12})^2 + F(\Gamma^y_{11})^2 - \frac{D+B}{DB}(\Gamma^y_{21}\Gamma^y_{12} - \Gamma^y_{11}\Gamma^y_{22})^2\right], \tag{3,13}$$

$$\bar{\vartheta}_{b_2} = -\,a_1\cos^3\beta\sin^3\beta\, s^4\, B\, C\,[E\,\Gamma^y_{12}\Gamma^y_{22} + F\Gamma^y_{11}\Gamma^y_{21}], \tag{3,14}$$

$$\bar{\vartheta}_{c_1} = a_1\cos^3\beta\sin^4\beta\, s^3\, B\, C\, D\left\{-\Gamma^y_{11}\left[F - \frac{(\Gamma^y_{22})^2}{B} - \frac{(\Gamma^z_{12})^2}{C} - \frac{(\Gamma^z_{22})^2}{D}\right] - \right. \\ \left. - \Gamma^y_{12}\left[\frac{\Gamma^y_{22}\Gamma^y_{21}}{B} + \frac{\Gamma^z_{12}\Gamma^z_{11}}{C} + \frac{\Gamma^z_{22}\Gamma^z_{21}}{D}\right]\right\}, \tag{3,15}$$

$$\bar{\vartheta}_{c_2} = a_1\cos^3\beta\sin^4\beta\, s^3\, B\, C\, D\left\{-\Gamma^y_{12}\left[E - \frac{(\Gamma^y_{21})^2}{B} - \frac{(\Gamma^z_{11})^2}{C} - \frac{(\Gamma^z_{21})^2}{D}\right] - \right. \\ \left. - \Gamma^y_{11}\left[\frac{\Gamma^y_{21}\Gamma^y_{22}}{B} + \frac{\Gamma^z_{11}\Gamma^z_{12}}{C} + \frac{\Gamma^z_{21}\Gamma^z_{22}}{D}\right]\right\}. \tag{3,16}$$

3. Zweierkopplung. Bei speziellen Querschnittsformen, wo die Verbindungsgerade vom Schwerpunkt und Querkraftmittelpunkt mit einer der beiden Hauptträgheitsachsen zusammenfällt, ist eine exakte Lösung der Differentialgleichungen (2,3), (2,4), (2,5) möglich. Hierbei findet eine „Entkopplung" der Biegeschwingungen in Richtung dieser einen Achse statt. Ist z. B. die z-Achse eine Hauptträgheitsachse und identisch mit der oben definierten Verbindungsgeraden, so verschwindet der Winkel β, und die Biegeschwingung in z-Richtung wird entkoppelt. Um einen Vergleich der Näherungsrechnung mit der exakten Rechnung zu ermöglichen, wird für diesen Fall die Frequenzdeterminante IV angegeben, die sich aus der Determinante III bei z. B. vier-parametrigem Ansatz von freien Eigenfunktionen entwickelt.

Koeffizientendeterminante IV.

Zweierkopplung, vier-parametriger Ansatz von freien Eigenfunktionen.

$$Y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2, \qquad \alpha^* = c_1\alpha_1^* + c_2\alpha^*.$$

$$\bar{\vartheta}_{IV} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{B^2(k_1^y)^4}{\bar{\omega}^2\mu} & 0 & +\Gamma^y_{11} & +\Gamma^y_{12} \\ 0 & 1 - \frac{B^2(k_2^y)^4}{\bar{\omega}^2\mu} & +\Gamma^y_{21} & +\Gamma^y_{22} \\ +\Gamma^y_{11} & +\Gamma^y_{21} & \frac{\Theta_Q}{2\mu s^2} - \frac{D(k_1^\alpha)^2}{2\bar{\omega}^2\mu s^2} & 0 \\ +\Gamma^y_{12} & +\Gamma^y_{22} & 0 & \frac{\Theta_Q}{2\mu s^2} - \frac{D(k_2^\alpha)^2}{2\bar{\omega}^2\mu s^2} \end{vmatrix} = 0$$

4. Untersuchung der Differentialgleichungen (2,3), (2,4) und (2,5) bei Dreierkopplung und Lösung derselben für den Sonderfall der Zweierkopplung. Für Stäbe mit der Länge nach veränderlichen, beliebigen Querschnitten ist es im allgemeinen nicht möglich, eine strenge Lösung

in geschlossener Form zu finden. Auch bei unveränderlichen Querschnitten beliebiger Form erscheint eine Integration praktisch undurchführbar. Nur bei Zweierkopplung gelingt die Losung. Die Bedeutung dieser exakten Rechnung liegt weniger in ihrer Anwendung für die Praxis (hierfür ist eine numerische Durchrechnung zu zeitraubend), als vielmehr in der Möglichkeit, an einem Sonderproblem die Genauigkeit der *Ritz*schen Näherungen zu diskutieren.

a) Dreierkopplung $\beta \neq 0$. Ist der Stabquerschnitt der Länge nach konstant, so lauten die drei gekoppelten Differentialgleichungen (2,3), (2,4) und (2,5)

$$\left.\begin{aligned} &EJ^z y_{xxxx}(x,t) + \mu y_{tt}(x,t) + \mu s \cos\beta \alpha_{tt}(x,t) = 0, \\ &EJ^y z_{xxxx}(x,t) + \mu z_{tt}(x,t) - \mu s \sin\beta \alpha_{tt}(x,t) = 0, \\ &GT\alpha_{xx}(x,t) - \Theta_Q \alpha_{tt}(x,t) - \mu s \cos\beta y_{tt}(x,t) + \mu s \sin\beta z_{tt}(x,t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,1}$$

Durch geeignetes Eliminieren und Differentieren entstehen hieraus die drei entkoppelten Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &A_1 \frac{\partial^{10} z(x,t)}{\partial x^{10}} + A_2 \frac{\partial^{10} z(x,t)}{\partial x^8 \partial t^2} + A_3 \frac{\partial^8 z(x,t)}{\partial x^6 \partial t^2} + A_4 \frac{\partial^8 z(x,t)}{\partial x^4 \partial t^4} + A_5 \frac{\partial^6 z(x,t)}{\partial x^2 \partial t^4} + A_6 \frac{\partial^6 z(x,t)}{\partial t^6} = 0, \\ &A_1 \frac{\partial^{10} y(x,t)}{\partial x^{10}} + A_2 \frac{\partial^{10} y(x,t)}{\partial x^8 \partial t^2} + A_3 \frac{\partial^8 y(x,t)}{\partial x^6 \partial t^2} + A_4 \frac{\partial^8 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t^4} + A_5 \frac{\partial^6 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^4} + A_6 \frac{\partial^6 y(x,t)}{\partial t^6} = 0, \\ &A_1 \frac{\partial^{10} \alpha(x,t)}{\partial x^{10}} + A_2 \frac{\partial^{10} \alpha(x,t)}{\partial x^8 \partial t^2} + A_3 \frac{\partial^8 \alpha(x,t)}{\partial x^6 \partial t^2} + A_4 \frac{\partial^8 \alpha(x,t)}{\partial x^4 \partial t^4} + A_5 \frac{\partial^6 \alpha(x,t)}{\partial x^2 \partial t^4} + A_6 \frac{\partial^6 \alpha(x,t)}{\partial t^6} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

Sie sind linear, homogen und von zehnter Ordnung mit den gemeinsamen konstanten Koeffizienten

$$A_1 = \frac{1}{\mu^2} EJ^z EJ^y GT, \quad A_2 = -\frac{1}{\mu^2} EJ^z EJ^y \Theta_Q, \quad A_3 = \frac{1}{\mu} GT(EJ^z + EJ^y),$$

$$A_4 = s^2 [EJ^y \cos^2\beta + EJ^z \sin^2\beta] - \frac{\Theta_Q}{\mu}(EJ^z + EJ^y), \quad A_5 = GT, \quad A_6 = \mu s^2 - \Theta_Q = -\Theta_s.$$

Die Integration der Gleichungen scheitert an der geschlossenen Formulierung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung fünften Grades.

b) Zweierkopplung $\beta = 0$. Die z-Achse sei identisch mit der Hauptachse in z-Richtung. Der Winkel β verschwindet, und die Störung der Biegeschwingungen in z-Richtung durch die Schwingungen bezüglich der beiden anderen Freiheitsgrade entfällt. Es besteht demnach nur noch eine Kopplung zwischen der Drehbewegung und der Translationsbewegung in y-Richtung. Die Differentialgleichungen zehnter Ordnung der Funktionen $y(x,t)$ und $\alpha(x,t)$ reduzieren sich auf solche sechster Ordnung, deren Behandlung möglich ist.

Mit $\sin\beta = 0$ und $\cos\beta = 1$ wird aus den Gleichungen (2,7) und (2,9)

$$B^z Y^{IV}(\xi) - \omega^2 \mu Y(\xi) - \omega^2 \mu s \alpha^*(\xi) = 0, \tag{4,3}$$

$$D\alpha^{*\prime\prime}(\xi) + \omega^2 \Theta_Q \alpha^*(\xi) + \omega^2 \mu s Y(\xi) = 0. \tag{4,4}$$

Die beiden zugehörigen ungekoppelten Gleichungen sind lineare homogene Differentialgleichungen sechster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$Y^{VI}(\xi) + \frac{\Theta_Q \omega^2}{D} Y^{IV}(\xi) - \frac{\mu\omega^2}{B^z} Y''(\xi) - \frac{\mu\omega^4 \Theta_s}{DB^z} Y(\xi) = 0, \tag{4,5}$$

$$\alpha^{*VI}(\xi) + \frac{\Theta_Q \omega^2}{D} \alpha^{*IV}(\xi) - \frac{\mu\omega^2}{B^z} \alpha^{*\prime\prime}(\xi) - \frac{\mu\omega^4 \Theta_s}{DB^z} \alpha^*(\xi) = 0. \tag{4,6}$$

Beide Gleichungen ergeben dieselben Eigenschwingungszahlen. Wegen der einfacheren Randbedingungen wird Gleichung (4,5) weiter untersucht.

Für den meistens zutreffenden Fall

$$\frac{\omega^4 \mu}{3DB^z}\left(\Theta_Q - \frac{3}{2}\mu s^2\right) > \left(\frac{\omega^2 \Theta_Q}{3D}\right)^3$$

lautet ihre allgemeine Lösung in trigonometrischer Gestalt

$$Y(\xi) = A \operatorname{Sin} k_1\xi + B \operatorname{Cof} k_1\xi + C \sin k_2\xi + D \cos k_2\xi + E \sin k_3\xi + F \cos k_3\xi. \tag{4,7}$$

Hierin bedeuten

$$\Theta_s = \Theta_Q - \mu s^2, \qquad \cos 3\varphi = \frac{\frac{\omega^4 \mu}{3 D B^2}\left(\Theta_Q - \frac{3}{2}\mu s^2\right) - \left(\frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}\right)^3}{\left[\left(\frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}\right)^2 + \frac{\omega^2 \mu}{3 B^2}\right]^{3/2}},$$

$$k_1 = \sqrt{2\sqrt{\left(\frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{3 B^2}} \cdot \cos\varphi - \frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}},$$

$$k_2 = \sqrt{2\sqrt{\left(\frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{3 B^2}} \cdot \cos(60^\circ - \varphi) + \frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}},$$

$$k_3 = \sqrt{2\sqrt{\left(\frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{3 B^2}} \cdot \cos(60^\circ + \varphi) + \frac{\omega^2 \Theta_Q}{3 D}}.$$

Als Sonderfall wird der einseitig eingespannte und anderseitig frei schwingende Stab aus der Vielzahl der Einspannungsmöglichkeiten herausgegriffen.

Die Randbedingungen heißen

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(1) = 0, \quad Y'''(1) = 0, \quad \alpha^*(0) = 0, \quad \alpha^{*\prime}(1) = 0.$$

Die vorletzte Bedingung ist identisch mit $Y^{IV}(\xi) = 0$ und die letzte mit $Y'(1) - \frac{B^2}{\mu\omega^2} Y^V(1) = 0$ entsprechend den Forderungen der Differentialgleichung (4,3). Mit diesen sechs Randbedingungen und den einzelnen Ableitungsfunktionen entstehen sechs lineare homogene Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante V verschwinden muß.

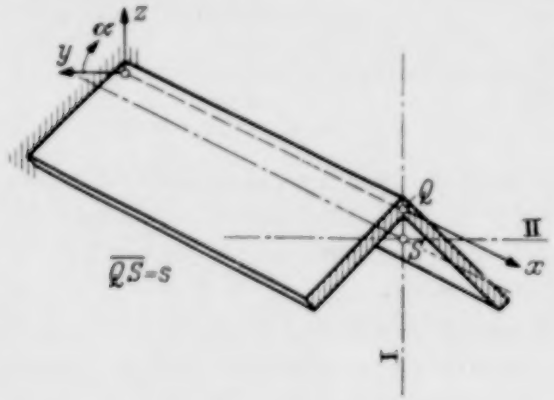

Abb. 2. Gleichschenkeliges Winkeleisen L 3660 × 100 × 100 × 14, einseitig eingespannt, anderseitig frei (Zweierkopplung).

Die Querschnittsdaten und Materialkonstanten werden mit 6stelliger Genauigkeit angenommen.

$s = 3{,}50000\,[\mathrm{cm}]$

$\mu = 2{,}10000 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{kg \cdot s^2 \cdot cm^{-2}}]$

$GT = 186340 \cdot 10^3\,[\mathrm{kg \cdot cm^2}]$

$EJ^2 = 744000 \cdot 10^3\,[\mathrm{kg \cdot cm^3}]$

$\Theta_Q = \Theta_s + \mu s^2 = 6{,}35000 \cdot 10^{-3}\,[\mathrm{kg \cdot s^2}]$.

Koeffizientendeterminante V.

$$\vartheta_V = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ k_1^2 \operatorname{Sin} k_1 & k_1^2 \operatorname{Cof} k_1 & -k_2^2 \sin k_2 & -k_2^2 \cos k_2 & -k_3^2 \sin k_3 & -k_3^2 \cos k_3 \\ k_1^3 \operatorname{Cof} k_1 & k_1^3 \operatorname{Sin} k_1 & -k_2^3 \cos k_2 & -k_2^3 \sin k_2 & -k_3^3 \cos k_3 & -k_3^3 \sin k_3 \\ 0 & k_1^4 & 0 & k_2^4 & 0 & k_3^4 \\ k_1 g_1 \operatorname{Cof} k_1 & k_1 g_1 \operatorname{Sin} k_1 & k_2 g_2 \cos k_2 & -k_2 g_2 \sin k_2 & k_3 g_3 \cos k_3 & -k_3 g_3 \sin k_3 \end{vmatrix} = 0$$

mit $g_1 = 1 - \frac{B^2 k_1^4}{\mu\omega^2}$, $g_2 = 1 - \frac{B^2 k_2^4}{\mu\omega^2}$, $g_3 = 1 - \frac{B^2 k_3^4}{\mu\omega^2}$ für $k_1^4 \neq k_2^4 \neq k_3^4$.

5. Beispiel für eine Zweierkopplung. Um einen Überblick über die Fehler des *Ritz*schen Verfahrens zu erlangen, werden die Eigenschwingungszahlen eines gleichschenkeligen Winkeleisens (Abb. 2) nach der Differentialgleichungs- und der *Ritz*schen Methode durchgerechnet. Die Ergebnisse (Tabelle 2) zeigen, daß schon bei einem vier-parametrigen Ansatz die Fehler des *Ritz*schen Verfahrens praktisch verschwinden. Deshalb sind auch bei Dreierkopplung und gleichartigen Ansätzen nur Abweichungen dieser Größenordnung zu erwarten.

Tabelle 2. *Eigenschwingungszahlen eines gleichschenkeligen Winkeleisens (Abb. 2).*

Bezeichnung	$\omega_{\mathrm{I}}\ [s^{-1}]$	$\omega_{\mathrm{II}}\ [s^{-1}]$	$\omega_{\mathrm{III}}\ [s^{-1}]$
Genaue Frequenzen nach Determinante V . .	48,948	269,10	336,80
Näherungsfrequenzen nach Determinante IV .	48,963	269,30	337,47
Fehler des *Ritz*schen Verfahrens	+ 0,030%	+ 0,074%	+ 0,20%
Freie Eigenfrequenzen nach den Beziehungen (3,4) und Tabelle 1	$\omega_1^{\mathrm{V}} =$ 49,388	$\omega_1^{\mathrm{A}} =$ 301,38	$\omega_2^{\mathrm{V}} =$ 309,51
Einfluß der Kopplung	—0,89%	—10,7%	+ 8,8%

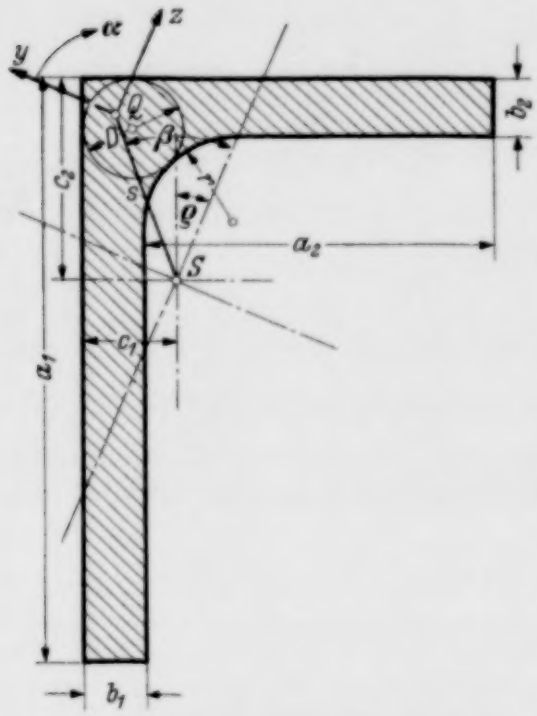

Abb. 3. Querschnitt des experimentell untersuchten Stabes.

$b_1 = 5{,}05$ [mm],
$b_2 = 4{,}85$ [mm],
$a_1 = 52{,}00$ [mm],
$a_2 = 30{,}90$ [mm],
$r = 8{,}00$ [mm],
$D = 8{,}25$ [mm],
$s = 16{,}0$ [mm],
$c_1 = 8{,}05$ [mm],
$c_2 = 17{,}5$ [mm],
$\beta = 42{,}0°$,
$\varrho = 23{,}2°$.

Querschnittsfläche: $F = 4{,}260\,[\mathrm{cm}^2]$,

Stabmasse je Längeneinheit: $\mu = 3{,}410 \cdot 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{kg} \cdot s^2}{\mathrm{cm}^2}\right]$

Rotationsträgheitsmoment,
bezogen auf die elastische Achse: $\Theta_Q = 2{,}131 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{kg} \cdot s^2]$
bezogen auf die Schwerachse: $\Theta_s = 1{,}258 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{kg} \cdot s^2]$

Axiales Trägheitsmoment bezogen auf die Hauptachsen parallel zur s- bzw. y-Achse: $J^z = 2{,}536\,[\mathrm{cm}^4]$, $J^y = 13{,}20\,[\mathrm{cm}^4]$.

Torsionssteifigkeit nach *F. Schleicher*[1]: $T = 0{,}4050\,[\mathrm{cm}^4]$,
Elastizitätsmodul: $E = 2{,}100 \cdot 10^6\,[\mathrm{kg/cm}^2]$
Gleitmodul: $G = 0{,}8080 \cdot 10^6\,[\mathrm{kg/cm}^2]$

[1] *F. Schleicher*: Handbuch für Bauingenieure. S. 173, Berlin 1943.

6. Beispiel für eine Dreierkopplung. Zur Bestätigung der vorliegenden Theorie werden die gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines ungleichschenkeligen Winkeleisens (Abb. 3) als Beispiel für den allgemeinen Fall der Dreierkopplung bei prismatischen Stäben mit willkürlichem Querschnitt experimentell und rechnerisch untersucht.

a) Experimentelle Untersuchung. Abb. 4 und 5 zeigen die Versuchseinrichtung. Durch einen Wechselstrommagneten mit harmonisch pulsierendem Feld wird der Stab am freien Ende zu erzwungenen Schwingungen angeregt, die im Reso-

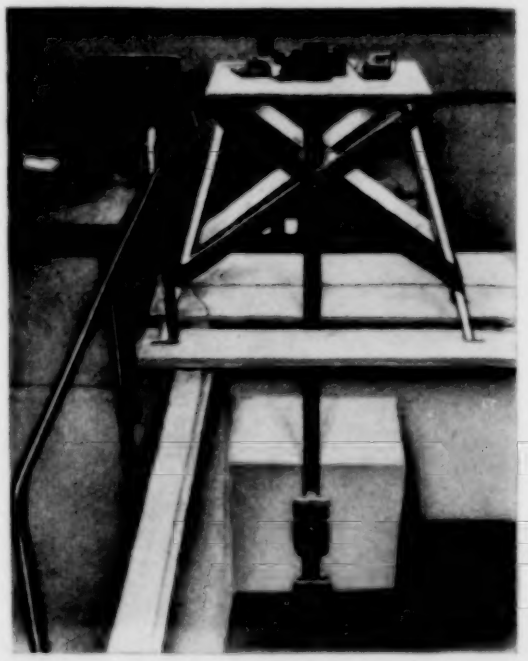

Abb. 4. Der Versuchsstand.

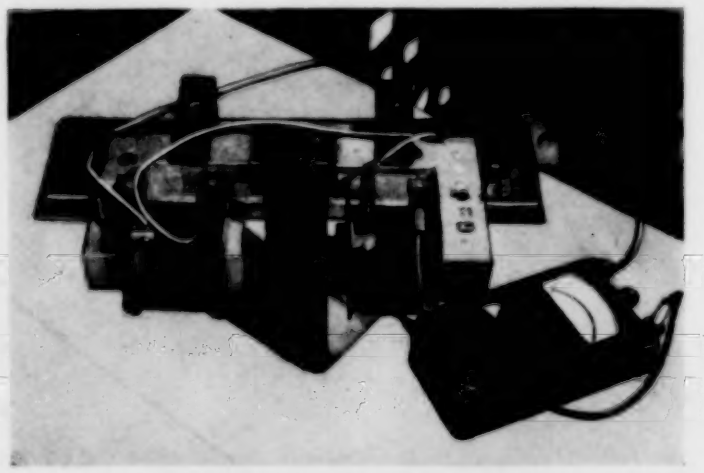

Abb. 5. Die Anordnung des Erreger-Magneten.

nanzfall angenähert in stationäre Eigenschwingungen übergehen. Der Magnetisierungsstrom wird in einem *Leonard*aggregat erzeugt, das in einfachster Weise der Forderung nach weitgehender und feinstufiger Drehzahlregelung gerecht wird. Bei Resonanz stehen Eigenfrequenz

und Erregerfrequenz im Verhältnis ganzer Zahlen, wenn Dämpfungseinflüsse keine Rolle spielen. Folglich läßt sich aus der Drehzahl des *Leonard*generators die Eigenschwingungszahl berechnen.

Zur Darstellung der Schwingungsfiguren des Stabendes dienen vier polierte Stahlkugeln, die an den beiden Schenkelenden, im Schwerpunkt und im Querkraftmittelpunkt des Stirnquerschnittes aufgelötet sind (Abb. 5). Die Stahlkugeln wirken als konvexe Spiegel und lassen das Bild einer nahen Lichtquelle als Reflexpunkt erscheinen. Erfolgt die Bewegung der Kugeln schnell genug, so erzeugen diese Punkte im zeitlichen Ablauf helle, scharfe Kurven, die nahezu fehlerfrei die wahren Schwingungsfiguren der gewählten Querschnittspunkte wiedergeben. Durch Vergleich aller vier Bilder können dann Rückschlüsse über die Formen der Eigenfunktionen am Stabende gezogen werden. Die Meßergebnisse sind in Tabelle 3 unter „gemessen" angegeben.

b) Rechnerische Untersuchung. Durch Aufsuchen der Nullstellen der Frequenzdeterminante III bzw. der Gleichung (3,10) ergeben sich die in Tabelle 3 unter „gerechnet" verzeichneten gekoppelten Eigenfrequenzen.

Die Ermittlung der Parameter für die angenäherten Eigenschwingungsfunktionen ist zwar langwierig, bereitet prinzipiell aber keine Schwierigkeiten. Deshalb wird die Betrachtung des Bewegungszustandes nur bei der Stablänge $l = 207{,}0$ [cm] und $\bar{\omega}_{IV} = 377{,}3$ [s^{-1}] durchgeführt.

Tabelle 3. *Gerechnete und gemessene Eigenschwingungszahlen eines ungleichschenkeligen Winkeleisens (Dreierkopplung) sowie Angaben über den Kopplungseinfluß.*

Stablänge	l	cm	130,5	177,1	207,0	244,7
Freie Eigenfrequenz	ω_1^V	s^{-1}	81,59			
Gekoppelte Eigenfrequenz gerechnet	$\bar{\omega}_I$	„	81,34			
Gekoppelte Eigenfrequenz gemessen	ω_I	„	80,97	nicht gemessen		
Abweichung der Rechnung		%	+ 0,5			
Kopplungseinfluß		%	— 0,8			
Freie Eigenfrequenz	ω_1^z	s^{-1}	186,15	101,07	73,98	
Gekoppelte Eigenfrequenz gerechnet	$\bar{\omega}_{II}$	„	183,5	100,32	73,58	
Gekoppelte Eigenfrequenz gemessen	ω_{II}	„	182,5	99,77	73,09	
Abweichung der Rechnung		%	+ 0,55	+ 0,6	+ 0,7	
Kopplungseinfluß		%	— 2,0	— 1,3	— 1,2	
Freie Eigenfrequenz	ω_2^V	s^{-1}	511,3	277,6	203,2	145,4
Gekoppelte Eigenfrequenz gerechnet	$\bar{\omega}_{III}$	„	491,7	273,6	201,2	144,5
Gekoppelte Eigenfrequenz gemessen	ω_{III}	„	491,0	272,8	201,0	144,2
Abweichung der Rechnung		%	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,2
Kopplungseinfluß		%	— 4,1	— 1,8	— 1,1	— 0,8
Freie Eigenfrequenz	ω_{1s}^x	s^{-1}	613,9	452,4	387,0	327,4
Gekoppelte Eigenfrequenz gerechnet	$\bar{\omega}_{IV}$	„	630,5	448 8	377,3	304,2
Gekoppelte Eigenfrequenz gemessen	ω_{IV}	„	630,0	448,2	375,2	302,0
Abweichung der Rechnung		%	+ 0,08	+ 0,1	+ 0,6	+ 0,7
Kopplungseinfluß		%	+ 2,5	— 0,9	— 3,1	— 8,4
Freie Eigenfrequenz	ω_2^z	s^{-1}	1167	633,4	463,6	331,8
Gekoppelte Eigenfrequenz gerechnet	$\bar{\omega}_V$	„	1105	628,8	470,4	354,2
Gekoppelte Eigenfrequenz gemessen	ω_V	„	1076	619,4	466,5	353,6
Abweichung der Rechnung		%	+ 2,7	+ 1,5	+ 0,8	+ 0,2
Kopplungseinfluß		%	— 8,5	— 2,3	+ 0,6	+ 6,2

Mit $B = 1{,}2854$, $C = 2{,}1476$, $D = -1{,}1391$, $E = 0{,}46238$ und $F = -5{,}6031$ wird nach den Gleichungen (3,11) bis (3,16)

$$\bar{\vartheta}_N = +3{,}2251\ [\mathrm{cm}^4], \quad \bar{\vartheta}_{a_2} = +1{,}4066\, a_1\ [\mathrm{cm}^4], \quad \bar{\vartheta}_{b_1} = -2{,}9926\, a_1\ [\mathrm{cm}^4],$$

$$\bar{\vartheta}_{b_2} = +1{,}7628\, a_1\ [\mathrm{cm}^4], \quad \bar{\vartheta}_{c_1} = +3{,}9957\, a_1\ [\mathrm{cm}^3], \quad \bar{\vartheta}_{c_2} = +0{,}10537\, a_1\ [\mathrm{cm}^3]$$

und mithin $a_2 = +0{,}43614\, a_1$, $b_1 = -0{,}92790\, a_1$, $b_2 = +0{,}54660\, a_1$,

$$c_1 = +1{,}2389\, a_1\ [\mathrm{cm}^{-1}], \quad c_2 = 0{,}032671\, a_1\ [\mathrm{cm}^{-1}].$$

Hierdurch ist die Eigenschwingungsform vermöge der drei Koordinatenfunktionen $y(\xi,t)$, $z(\xi,t)$ und $\alpha(\xi,t)$ angenähert beschrieben:

$$y(\xi,t)_{IV} = a_1 \{+\beta_1^y(\sin k_1^y\xi - \mathfrak{Sin}\, k_1^y\xi) + \cos k_1^y\xi - \mathfrak{Cof}\, k_1^y\xi + \\ + 0{,}43614\,[+\beta_2^y(\sin k_2^y\xi - \mathfrak{Sin}\, k_2^y\xi) + \cos k_2^y\xi - \mathfrak{Cof}\, k_2^y\xi]\}\sin\bar{\omega}_{IV}t\,, \tag{6,1}$$

$$z(\xi,t)_{IV} = a_1 \{-0{,}92790\,[+\beta_1^z(\sin k_1^z\xi - \mathfrak{Sin}\, k_1^z\xi) + \cos k_1^z\xi - \mathfrak{Cof}\, k_1^z\xi] \\ + 0{,}54660\,[+\beta_2^z(\sin k_2^z\xi - \mathfrak{Sin}\, k_2^z\xi) + \cos k_2^z\xi - \mathfrak{Cof}\, k_2^z\xi]\}\sin\bar{\omega}_{IV}t\,, \tag{6,2}$$

$$\alpha(\xi,t)_{IV} = a_1 \{+1{,}2389\sin k_1^\alpha\xi + 0{,}032671\sin k_2^\alpha\xi\}\sin\bar{\omega}_{IV}t\,[\mathrm{cm}^{-1}] \tag{6,3}$$

für a_1 in [cm]. Die Konstanten β_n^y, β_n^z und k_n^y, k_n^z sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Mit $Y(1)_n = \pm 2$ (Pluszeichen für gerade und Minuszeichen für ungerade Ordnungen) nach der Beziehung (3,7)

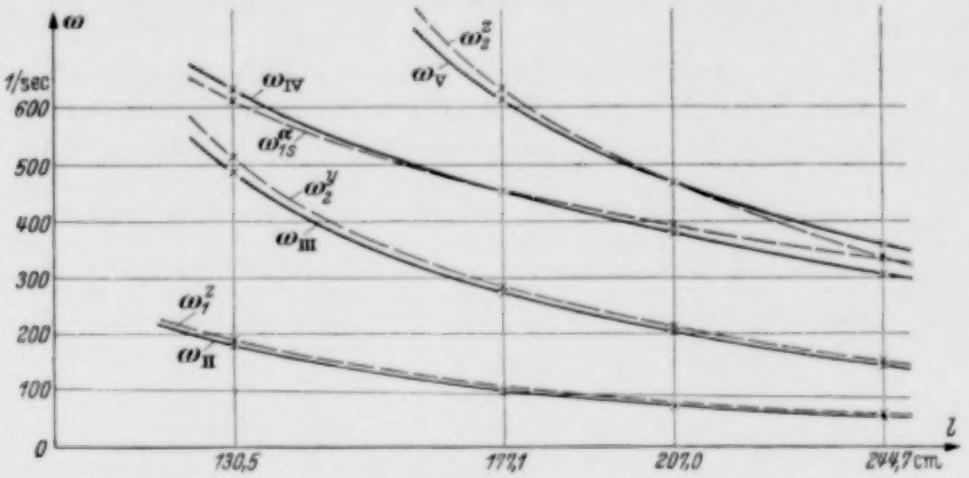

Abb. 6. Verlauf der freien und gekoppelten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Stablänge.

$$\int_0^1 (Y(\xi)_n)^2\,d\xi = \frac{1}{4}(Y(1)_n)^2 = 1$$

lauten die auf a_1 bezogenen Maximalverschiebungen des Stabendes

$$Y(1)_{IV} = -1{,}1277\,a_1,$$
$$Z(1)_{IV} = +2{,}9526\,a_1,$$
$$\alpha(1)_{IV} = +1{,}2062\,[\mathrm{cm}^{-1}]a_1.$$

Der Faktor a_1 wird jetzt so gewählt, daß

$$\sqrt{Y(1)^2 + Z(1)^2}$$

mit der wirklichen Amplitude der reinen Transversalbewegung übereinstimmt (Punkt 1 vgl. Abb. 8 und Abb. 9). Diese wird der Abb. 8 entnommen und beträgt $\approx 0{,}285$ [cm].

Somit wird

$$a_1 = \frac{0{,}285}{\sqrt{1{,}1277^2 + 2{,}9526^2}}\,[\mathrm{cm}] = 0{,}094\,[\mathrm{cm}]$$

und

$$Y(1)_{IV} = -0{,}106\,[\mathrm{cm}], \quad Z(1)_{IV} = +0{,}277\,[\mathrm{cm}], \quad \alpha(1)_{IV} = +0{,}113\,. \tag{6,4}$$

Abb. 9 zeigt diese Verschiebungen.

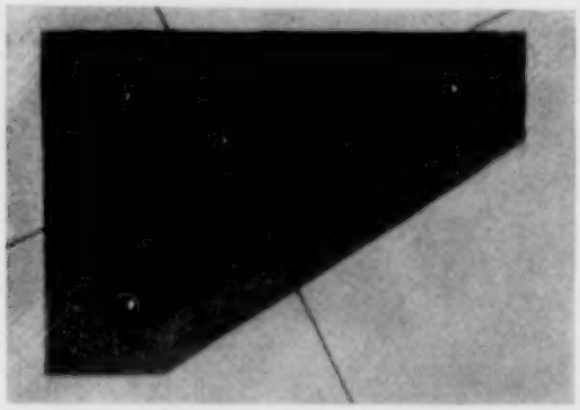

Abb. 7. Stabende im Ruhezustand von oben gesehen.

Abb. 8. Stab im vierten Resonanzzustand.

c) Vergleich der gerechneten mit den gemessenen Schwingungszahlen und Ermittlung des Kopplungseinflusses. In Tabelle 3 sind die Rechnungs- und Meßergebnisse zusammengestellt und in Abb. 6 kurvenmäßig aufgetragen. Die mittleren Toleranzen bei der Angaben infolge Meßfehler und ungenauer Erfassung der Querschnittsabmessungen sind geringer als $\pm 0{,}5\,\%$ und damit durchaus tragbar. In allen Fällen liegen die gerechneten Werte etwas über den gemessenen. Diese geringen Differenzen entstehen erstens durch den Verfahrensfehler der *Ritz*schen Methode, zweitens durch die behinderte Querschnittsverwölbung im Ein-

spannbereich, die bei den kurzen Stablängen die Verdrehungssteifigkeit etwas erhöhen würde, und drittens, allerdings nur sehr wenig, durch die vernachlässigte Dämpfung.

Trotz dieser Unterschiede wird der Kopplungseinfluß, d. h. der prozentuale Unterschied zwischen der Kopplungseigenfrequenz und der freien Eigenfrequenz nach Gleichung (3,4) mit befriedigender Genauigkeit erfaßt.

d) Vergleich der berechneten Schwingungsfiguren des Stabendes mit den wirklichen. Abb. 7 zeigt das obere Stabende von oben gesehen im Ruhestand. Die hellen Reflexpunkte auf den vier Kugeln sind deutlich zu erkennen. Die schwarzen Striche markieren die Trägheitshauptachsen. Der Kürze halber wird nur der vierte Resonanzzustand mit $\omega_{IV} = 375{,}2\ [s^{-1}]$ wiedergegeben (Abb. 8). Die zugehörige freie Bewegungsform ist die erste Torsionsschwingung mit der Schwerachse als Drehachse. Die Abweichung durch den Kopplungseffekt ist unverkennbar. Abb. 9 zeigt die durch die Angaben (6,4) festgelegten Figuren für den obigen Zustand. Sie stimmen gut mit den wirklichen in Abb. 8 überein und lassen deutlich erkennen, wie sich die Bewegung aus einer reinen Translation des Querkraftmittelpunktes und einer Rotation um ihn zusammensetzt.

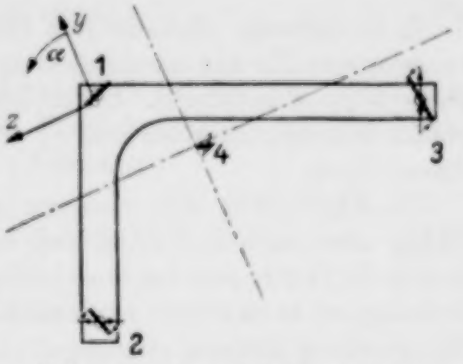

Abb. 9. Gerechnete Schwingungsfiguren des vierten Resonanzzustandes.

7. Zusammenfassung. Es wurden die gekoppelten Eigenschwingungen von Stäben mit beliebigen Querschnitten untersucht. Bei „Zweierkopplung" (Definition siehe Einleitung) wurde eine exakte und bei „Dreierkopplung" eine angenäherte Berechnungsmethode der gekoppelten Schwingungszahlen und Schwingungsformen hergeleitet. An einem ungleichschenkeligen Winkeleisen als Beispiel für eine Dreierkopplung wurden die theoretischen Ergebnisse experimentell bestätigt. Der Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Stablänge läßt folgendes erkennen (Abb. 6): Die gegenseitige Störung der Biege- und Torsionsschwingungen ist so gerichtet, daß sich benachbarte freie Biege- und Torsionseigenfrequenzen auseinanderdrücken, und zwar um so stärker, je näher sie zusammenliegen. Diese Erscheinung ist von den gekoppelten Pendelschwingungen her bekannt. Die Größenordnung der Störung durch die Kopplung (beim ersten Beispiel maximal 10 % und beim zweiten maximal 8 %) zeigt, daß sie in manchen Fällen Beachtung verdient. Von großem Einfluß ist der Abstand zwischen elastischer Achse und Schwerachse, da er quadratisch in die Rechnung eingeht. Bei kurzen, verdrehungsweichen Stäben ist ein stärkerer Kopplungseinfluß zu erwarten, da hierbei die erste freie Torsionsfrequenz im Bereich der unteren freien Biegefrequenzen liegt. Bei langen, verdrehungssteifen Stäben dagegen unterscheiden sich die unteren, gekoppelten Biegeschwingungszahlen kaum von den jeweiligen freien Eigenschwingungszahlen, denn die erste Torsionsfrequenz liegt in diesen Fällen wesentlich höher.

(Eingegangen am 13. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. *H.-R. Lembcke*, Westerrönfeld bei Rendsburg, z. Zt. Kiel-Friedrichsort, MAK.

Über die Stabilität punktweise ausgesteifter Rechteckplatten.

Von S. Woinowsky-Krieger.

1. Einleitung. Bekanntlich läßt sich die Beulsicherheit dünner, einem Druck oder Schub ausgesetzter Platten erheblich steigern, wenn man ihre Fläche durch eine oder auch mehrere biegesteife Rippen unterteilt. Unter Umständen kann es sich als zweckmäßig erweisen, die Platte nur punktweise festzuhalten und es erhebt sich dann die Frage nach der Wirksamkeit einer solchen Aussteifung.

Die Platte läßt sich in einem innerhalb ihrer Begrenzung vorgegebenen Punkt entweder gelenkig oder auch in Verbindung mit einer Einspannung abstützen. Bei der ersten Anordnung leistet die Stütze nur der Durchbiegung der Platte Widerstand, bei der zweiten zugleich ihrer Verdrehung, sei es in einem vorgezeichneten oder in einem beliebigen Sinn. Die Abstützung und die Einspannung können ebensogut starr als auch nachgiebig, etwa elastisch, sein. Im letzten Fall ist der vom Stützpunkt ausgeübte Widerstand der Durchbiegung der Platte respektive ihrer Verdrehung proportional.

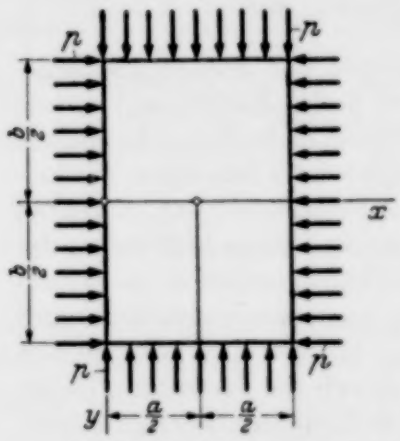

Abb. 1. Die Rechteckplatte im Koordinatensystem.

Die folgende Untersuchung bezieht sich auf eine Rechteckplatte, die einer einfachen Art von Druckbelastung ausgesetzt ist, den *Navier*schen Randbedingungen genügt und nur in ihrer Mitte punktweise abgestützt ist. Die angewendete Methode ist indessen allgemein genug, um auch in wesentlich anders gearteten Belastungs- und Stützungsfällen zum Ziele zu führen.

2. Aufstellung der Beulbedingung. Die in Abb. 1 dargestellte, ringsum gelenkig gelagerte und in ihrem Mittelpunkt unverschieblich gestütze Platte sei einem allseitigen Druck von der Größe p je Längeneinheit der Randlinie ausgesetzt. Die Platte möge in ihrem Mittelpunkt als eingespannt angenommen werden, doch gelten alle folgenden Überlegungen auch für die gelenkige Stützung, sofern man nur von einer Beulfläche mit doppelter Symmetrie ausgeht.

Die Grundlage der Stabilitätsrechnung bildet die bekannte Differentialgleichung der gleichförmig zusammengedrückten Platte

$$\Delta\Delta w + \frac{p}{D}\Delta w = 0\,, \tag{1}$$

worin w die Auslenkung, D die als konstant angenommene Biegesteifigkeit der Platte und $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ den *Laplace*schen Operator bezeichnet. Mit den Abkürzungen

$$\varkappa^2 = \frac{p}{D}\,, \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}\,, \qquad \beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - \varkappa^2} \tag{2}$$

läßt sich eine passende Lösung der Differentialgleichung für das Gebiet $0 \leq y \leq \frac{1}{2}b$ in folgender Form anschreiben:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A \operatorname{Sin} \alpha_n y + B_n \operatorname{Cof} \alpha_n y + C_n \operatorname{Sin} \beta_n y + D_n \operatorname{Cof} \beta_n y \right) \sin \alpha_n x\,. \tag{3}$$

Im Gebiet $0 \geq y \geq -\frac{1}{2}b$ soll derselbe Ausdruck gelten, nur mit $-y$ an Stelle von y. Da die elastische Fläche (3) die *Navier*schen Rundbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ längs der Ränder $x = 0$, $x = a$ wie ersichtlich erfüllt, bleibt es nur noch übrig die Parameter A_n, B_n, ... den Grenzbedingungen am Rande $y = \frac{1}{2}b$, sowie den Übergangsbedingungen längs der Mittellinie $y = 0$ anzupassen. Indem man am Rande speziell die *Navier*schen Bedingungen einführt und die Symmetrie in der Mitte beachtet, d. h. von den drei Bedingungen

$$(w)_{y=\frac{1}{2}b} = 0\,, \qquad (\Delta w)_{y=\frac{1}{2}b} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \tag{4}$$

Gebrauch macht, hat man die Möglichkeit, drei Integrationskonstanten, etwa A_n, B_n und D_n, durch die vierte auszudrücken. Hiermit läßt sich der Ausdruck (3) auf die Form

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\beta_n\left(\mathfrak{Sin}\,\alpha_n y - \mathfrak{Tg}\frac{\alpha_n b}{2}\mathfrak{Cof}\,\alpha_n y\right) - \alpha_n\left(\mathfrak{Sin}\,\beta_n y - \mathfrak{Tg}\frac{\beta_n b}{2}\mathfrak{Cof}\,\beta_n y\right)\right]\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n} \tag{5}$$

bringen, die für jedes n nur noch eine Integrationskonstante enthält. Die elastische Fläche (5) liefert längs der Mittellinie der Platte die Querkraft

$$q_y = -D\left[\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)\right]_{y=0} = -D\varkappa^2\sum_{n=1}^{\infty} C_n\beta_n \sin\alpha_n x\,. \tag{6}$$

Die Summe (6) muß nun identisch sein mit dem analytischen Ausdruck für die halbe Reaktion, die der Stützpunkt in der Mitte an die Plattenhälfte $y>0$ abgibt. Bezeichnet P die gesamte Reaktion der Stütze, so folgt aus der eben angestellten Überlegung die Gleichung

$$-D\varkappa^2\sum_{n=1}^{\infty} C_n\beta_n \sin\alpha_n x = \frac{P}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\alpha_n x\,, \tag{7}$$

aus der sich für $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$C_n = \frac{P(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{Da\varkappa^2\beta_n} \tag{8}$$

ergibt, während für gerades n der Koeffizient verschwindet. Die Substitution von C_n in die Reihe (6) liefert nun den Ausdruck für die verbeulte Plattenfläche mit nur noch einem unbestimmten Faktor P. Im Folgenden wird allein der Biegepfeil in Plattenmitte $x=\frac{1}{2}a$, $y=0$ benötigt und dieser ergibt sich auf die eben beschriebene Weise zu

$$w_0 = \frac{P}{Da\varkappa^3}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(\frac{\mathfrak{Tg}\frac{\alpha_n b}{2}}{\alpha_n} - \frac{\mathfrak{Tg}\frac{\beta_n b}{2}}{\beta_n}\right). \tag{9}$$

Wäre die Stützung elastisch nachgiebig, so hätte man $P=fw_0$ setzen müssen, sofern f eine Federkonstante bedeutet. Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung (9) käme man dann auf die endgültige Bedingung zur Bestimmung des Beulwertes $\varkappa^2 = p/D$. Im eingangs angenommenen Fall einer unnachgiebigen Stützung lautet diese letzte Bedingung einfach $w_0=0$. Dies hat zur Folge entweder $P=0$ bei einer unveränderten Gleichgewichtslage der Platte oder aber das Verschwinden des Summenausdruckes in (9). Nach Berücksichtigung der Abkürzungen (2) und nach Einführung der Bezeichnung

$$k^2 = \frac{pa^2}{\pi^2 D}\,, \tag{10}$$

womit sich also $k=a\varkappa/\pi$ ergibt, wird man schließlich auf die Gleichung

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[\frac{\mathfrak{Tg}\frac{\pi b n}{2a}}{n} - \frac{\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi b}{2a}\sqrt{n^2-k^2}\right)}{\sqrt{n^2-k^2}}\right] = 0 \tag{11}$$

in k^2 geführt, deren kleinste Wurzel den gesuchten Beuldruck p_k liefert.

Es ist bisher stillschweigend von der Annahme $n^2>k^2$ ausgegangen worden. In der weiter unten durchgeführten Auswertung der Beulgleichung ergab sich indessen $1<k<3$, wonach das erste Summenglied in der Gleichung (11) einer besonderen Behandlung bedarf. Es ist nun leicht nachzuweisen, daß der Sonderfall $n^2<k^2$ durch einfaches Vertauschen von n und k bei gleichzeitigem Ersatz der zugehörigen hyperbolischen Tangens-Funktionen durch die trigonometrische erledigt werden kann. Die Auswertung der Beulbedingung macht geringe Mühe, da für $n>3$ sämtliche $\mathfrak{Tg}$-Funktionen durch eine eins ersetzt werden dürfen; für $n>11$ wurden die Reihenglieder, und zwar durch Entwicklung nach den Potenzen der Größe k/n, außerdem noch auf die Form

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \approx \frac{k^2}{2n^3} \tag{12}$$

gebracht, wonach der betreffende Rest der Summe sich zu 0,00086 k^2 ergeben hat.

3. Ergebnisse der Stabilitätsberechnung. Die aus der Beulbedingung (11) resultierenden kleinsten Beulwerte k^2 sind in der ersten Zeile der nachstehenden Tabelle enthalten. Sie bestimmen den tatsächlichen Beuldruck, falls die konstruktive Ausbildung des Stützpunktes außer der Bedingung $w=0$ noch die Erfüllung der beiden weiteren Bedingungen $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$ in Plattenmitte sichert. Ist die Stützung gelenkig und nur die erste dieser drei Bedingungen erfüllt, so muß mit dem Ausbeulen der Platte in zwei Halbwellen um eine Knotenlinie gerechnet werden, deren Verlauf bei $b/a>1$ durch $x=0$ bestimmt ist. Die zugehörigen Beulwerte sind in der zweiten Zeile der Tabelle zusammengestellt, während die dritte Zeile die Beulwerte einer Rechteckplatte ohne jegliche Zwischenaussteifung angibt.

Tabelle der Beulwerte $k^2 = \dfrac{P_k a^2}{\pi^2 D}$.

Art der Abstützung im Mittelpunkt	Beulbedingung	Beulwerte			
		$\frac{b}{a}=1{,}0$	$\frac{b}{a}=1{,}5$	$\frac{b}{a}=2{,}0$	$\frac{b}{a}=3{,}0$
Gelenklose	Gleichung (11)	7,38	4,04	2,62	1,65
Gelenkige	$k^2=1+4a^2/b^2$	5,00	2,78	2,00	1,44
Keine	$k^2=1+a^2/b^2$	2,00	1,44	1,25	1,11

Nach der Tabelle erweist sich die gelenklose Abstützung der Plattenmitte weit wirksamer als die Anordnung einer Querrippe, während die aussteifende Wirkung der gelenkigen Punktstützung der Wirkung einer Querrippe gleichkommt. Bei länglichen Rechteckplatten ist eine Stütze in der Mitte fast ebensowenig effektiv wie eine Querrippe. In solchen Fällen wäre die Anordnung einer Längsrippe oder aber die Abstützung der Platte in mindestens zwei Punkten besser am Platze.

4. Schlußbemerkungen. Das hier dargelegte Verfahren bedarf nur geringer Modifikation, um auch in andersgearteten Fällen von Belastung und Stützung anwendbar zu bleiben. Grundsätzliche Schwierigkeiten sind eigentlich nur dann zu erwarten, wenn der Ansatz von *Levy* auch bei der Platte ohne Zwischenstützung versagt.

Ist z. B. die Rechteckplatte einem immer noch gleichförmigen, aber in den Richtungen der beiden Achsen verschiedenen Druck ausgesetzt, so ändert sich wohl die Differentialgleichung, nicht aber wesentlich die weitere Herleitung der Stabilitätsbedingung. Sind zwei gegenüberliegende Plattenränder gelenkig gelagert, so lassen sich beliebige Randbedingungen längs der beiden anderen Ränder durch entsprechende Abänderung der Gleichungen (4) sofort befriedigen. Wird dabei die Symmetrie, etwa durch die außermittige Lage der Zwischenstützung, hinfällig, so vermehrt sich mit der Anzahl der zu erfüllenden Rand- und Übergangsbedingungen entsprechend auch die Anzahl der verfügbaren Parameter. Der Bedingung der Einspannung an einer Zwischenstütze kann bei Asymmetrie der Beulfläche nur durch die Einführung von mindestens einem reaktiven Einzelmoment genügt werden. Man wird dabei, und ebenso bei mehr als einem Stützpunkt, auf ein System homogener Gleichungen für die unbekannten Reaktionen geführt. Durch Nullsetzung der Nennerdeterminante dieses Gleichungssystems ergibt sich dann die gesuchte Beulbedingung. Man wird allerdings gezwungen, Einzelmomente an einer Strecke oder einer Fläche von endlichen Abmessungen angreifen zu lassen; punktförmig konzentrierte Einzelmomente führen in der Tat auf eine ins unendliche wachsende Plattenneigung im Angriffspunkt, die zur Bestimmung der Größe des erzeugenden Momentes ungeeignet ist.

(Eingegangen am 15. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *S. Woinowsky-Krieger*, *Quebec* (Canada) 200 Av. Marguerite-Bourgeoys Apt. 8.

Über einige Versuche an Strömungen in Sand.

Von **K. Wieghardt.**

1. Einleitung. Im Folgenden werden einige einfache Versuche mit Sand beschrieben, die 1947 im Max Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen durchgeführt wurden. Zunächst war ganz allgemein beabsichtigt, Mischungen von Sand und Wasser — von trockenem Sand bis zu klarem Wasser — vom rheologischen Standpunkt aus zu untersuchen. Aber sehr bald erwies sich schon der trockene Sand als ein Strömungsmedium, das bereits genügend kompliziert für eine Sonderuntersuchung war.

Während in der Erdmechanik das Hauptinteresse in der Statik liegt, handelt es sich hier um dynamische Versuche. Die „Theorie" dazu besteht im wesentlichen nur aus dimensionsanalytisch gewonnenen Formeln, deren Hauptmerkmale jedoch von den Versuchen gut bestätigt werden, obwohl eine sicherlich wichtige Eigenschaft des Sandes, nämlich die Veränderlichkeit des Porenvolumens, die sogenannte Dilatanz[1], nicht berücksichtigt wurde.

2. Das Versuchsmaterial. Um sicher zu stellen, daß der Sand möglichst gleichförmig war, ohne ihn selber noch einmal sieben zu müssen, wurde er von einer Sandpapierfabrik bezogen und bestand daher aus gemahlenem Flint. Die Körner der beiden benutzten Sorten (feiner und grober Sand) erwiesen sich unter dem Mikroskop als scharfkantige Prismen. Im Gegensatz dazu sind bei natürlichem Sand, wie Fluß- und Seesand, die Körner nahezu zu Kugeln abgeschliffen. Daraus erklärt sich, daß die unten angegebenen Materialkonstanten teilweise abweichen von denen für gewöhnlich benutzten Sand. Die Porosität z. B., das ist das Verhältnis des Porenvolumen zwischen den Körnern zum Gesamtvolumen, kann bei Kugelpackungen nur zwischen $0{,}26_0$ und $0{,}47_6$ variieren; bei der dichtesten Packung bilden dabei die Mittelpunkte von je vier Kugeln ein Tetraeder, bei der lockersten Packung liegen die Mittelpunkte von je acht Kugeln auf den Ecken eines Würfels. Bei nadelförmigen Elementen ist dagegen rein geometrisch beinahe jede Porosität zwischen 0 und 1 möglich.

Die folgende Tabelle enthält einige Materialkonstanten, alle für lose Schüttung. Der Böschungswinkel wurde dadurch ermittelt, daß eine waagerechte Kreisscheibe in einem mit Sand gefüllten Eimer von außen festgehalten wurde und der Eimer ohne Erschütterungen langsam gesenkt wurde, bis ein kegelförmiger Sandhaufen auf der Scheibe übrig blieb.

	Feiner Sand	Grober Sand
Lineare Abmessungen	0,15—0,25 mm	0,5—1,5 mm
γ = spezifisches Gewicht	1,2 g/cm³	1,3 g/cm³
n = Porosität = Poren-/Gesamtvolumen	$0{,}51_6$	$0{,}51_9$
$n/(1-n)$ = Porenziffer	1,06	1,08
φ = Böschungswinkel über Kreisscheibe	36,0°	38,5°
$\mu = \tan\varphi$ = Reibungskoeffizient Sand gegen Sand	0,73	0,79
$K_{a,p} = [(1 \mp \sin\varphi)/\cos\varphi)]^2$ = Koeffizient des aktiven / passiven Erddrucks[2]	0,26	0,24
	3,9	4,3

3. Messungen des Drehmoments von Reibungskräften. Ein mit Sand gefüllter Eimer wurde auf einer horizontalen Drehscheibe befestigt, die von einem Motor angetrieben wurde. In den Sand wurden zentrisch verschiedene Zylinderstäbe und Kegel aus Stahl eingetaucht und das Drehmoment gemessen, das der drehende Sand auf sie ausübte. Dieses Moment hing im Versuchsbereich von 20 bis 60 Umdrehungen in der Minute nicht von der Drehgeschwindigkeit ab. Wegen der relativ großen Streuung der Meßergebnisse konnte ferner nicht zwischen den beiden Sandsorten (fein und grob) unterschieden werden.

a) Senkrechter Zylinder zentrisch eingetaucht. Um zu einer formelmäßigen Abschätzung der Reibungskräfte zu gelangen, soll angenommen werden, daß die in der statischen Erdmechanik bis zum Bewegungsbeginn üblichen Annahmen auch noch für stationäre Bewegungszustände zutreffen.

[1] *O. Reynolds*, On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. Phil. Mag. 1885.
[2] *K. von Terzaghi*, Erdmechanik.

Für kleine Eindringungstiefen kann der Einfluß der Eimerwände auf den Druck im Sand vernachlässigt werden, so daß der vertikale Druck durch das Eigengewicht wird $p_v = -\gamma y$, mit γ = spezifisches Sandgewicht und y = vertikale Koordinate (positiv nach oben) von der Sandoberfläche aus gemessen. Da der Sand sich hier passiv verhält, ist für das Verhältnis horizontaler/vertikaler Druck der Koeffizient K_p maßgebend: $p_h = K_p p_v$. Die Schubspannung an der Zylinderoberfläche ist $\tau = \mu_1 p_h$, mit μ_1 als Reibungskoeffizient Sand–Stahl, und somit wird das Reibungsmoment am ganzen Zylinder

$$M = \int_0^{-H} \mu_1 K_p \gamma y \pi d \frac{d}{2} dy = \frac{\pi}{4} \gamma d^2 \mu_1 K_p H^2 \qquad (1)$$

mit d als Zylinderdurchmesser und H als Eintauchtiefe. Diese Formel stimmt mit den Versuchsergebnissen nach Abb. 1 überein, wenn man $\mu_1 K_p = 6$ setzt, was mit $K_p \approx 4\,\mu_1 \approx 1{,}5$ bedeuten würde.

b) Senkrechter Kegel zentrisch eingetaucht. Mit 2α als Öffnungswinkel des Kegels und H als Eintauchtiefe wird der Halbmesser des Kegels in der beliebigen Tiefe $-y$ gleich $r = (H + y) \cdot \operatorname{tg} \alpha$; das Oberflächenelement in dieser Tiefe ist eine Ringfläche $2\pi r\, dy/\cos\alpha$. Senkrecht darauf wirkt der Druck

$$p_h \cos\alpha + p_v \sin\alpha,$$

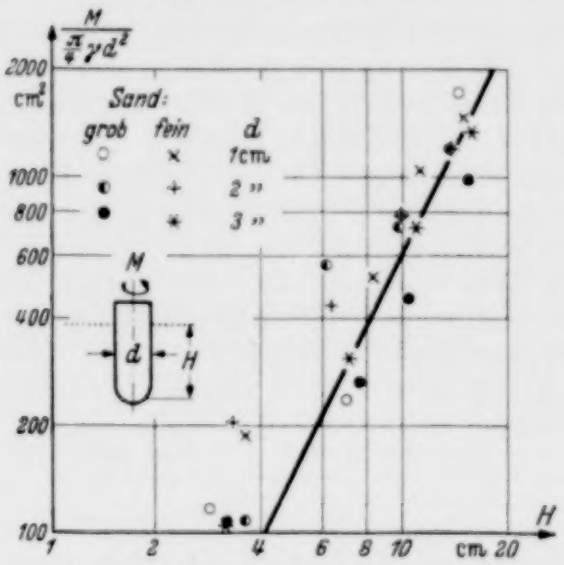

Abb. 1. Reibungsmoment an einem zentrisch eingetauchten Zylinder.

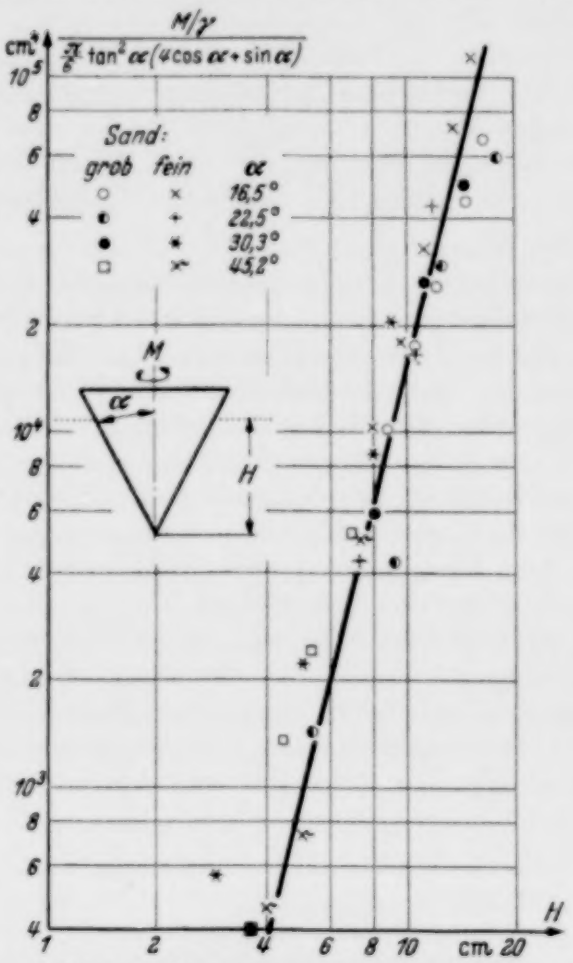

Abb. 2. Reibungsmoment an einem zentrisch eingetauchten Kegel.

so daß mit denselben Annahmen über den Druck wie oben das Reibungselement am Kegel wird

$$M = -\int_0^{-H} \mu_1 (K_p \cos\alpha + \sin\alpha)\, \gamma\, y \frac{2\pi r}{\cos\alpha} r \cos\alpha\, dy = \frac{\pi}{6} \gamma \operatorname{tg}^2\alpha\, (K_p \cos\alpha + \sin\alpha) \mu_1 H^4 . \qquad (2)$$

Auch diese Formel wird nach Abb. 2 bestätigt für Öffnungswinkel $2\alpha = 33°$ bis $90°$ und $K_p \approx 4$. Für μ_1 würde sich wieder 1,5 ergeben.

Ein so hoher Reibungskoeffizient erscheint allerdings ziemlich unwahrscheinlich, so daß vielleicht eher ein höherer Wert für K_p bei Bewegung als in Ruhe anzunehmen ist. Jedoch geben die Formeln die Abhängigkeit von der Eintauchtiefe, dem Zylinderdurchmesser bzw. dem Öffnungswinkel der Kegel richtig wieder. Zur Bestimmung der Zahlenfaktoren wären weitere Versuche, etwa mit normalem, rundkörnigen Sand wünschenswert.

4. Bewegungswiderstand von Zylinderstäben in Sand. Während in den obigen Versuchen der Sand in Ruhe war relativ zum Eimer außer in einer sehr dünnen Grenzschicht um den Widerstandskörper herum, wurde eine wirkliche Sandströmung erst erzeugt durch exzentrisches Eintauchen eines Zylinderstabes. Die Photographien Abb. 3 bis 5 illustrieren die Wirkung

auf die Oberfläche des Sandbetts. Auf den ersten Blick erinnert die Strömung an die in einer sehr zähen Flüssigkeit, etwa bei einer Reynoldszahl von der Größenordnung 1. Vor dem Stab ist eine Erhöhung und ein deutlich ausgeprägter Staupunkt (Abb. 3). Die Stromlinien sind auch im Nachlauf (Abb. 5) deutlich erkennbar und glatt und stoßen unter einem endlichen Winkel zusammen, — ein Anzeichen, daß dort auch in der dritten Koordinate, der Tiefe, eine Strömung vorhanden ist. Ein wesentlicher Unterschied gegen die Strömung in einer normalzähen Flüssigkeit besteht darin, daß das Totwasser scharf begrenzt ist. Danach ist der Sand, ähnlich wie gewisse nicht-*Newton*ische Flüssigkeiten ein Medium mit einer Mindest-Fließ-Grenze für die Schubspannung. Jedoch ist hier diese Mindestschubspannung proportional dem Normaldruck (*Coulomb*sches Reibungsgesetz). Schon in verhältnismäßig kleinem Abstand vom Zylinder, wo die Schubspannung kleiner ist als dieser Mindestwert, findet überhaupt keine Strömung statt. Gerade diese Tatsache ermöglicht die ganze Versuchsanordnung, nämlich einen Rundlauf mit sehr kleinem Radius.

Abb. 3. Staupunkt in einer Sandströmung (Zylinderdurchmesser 20 mm).

Ebenso wie das Reibungsmoment von zentrisch eingetauchten Rotationskörpern erwies sich auch der Widerstand von exzentrisch eingetauchten Körpern unabhängig von der Drehgeschwindigkeit, obwohl das natürlich nicht zutraf für die Verformung der Sandoberfläche. Da der Druck im Sand nicht isotrop ist wie in einer Flüssigkeit, und auch kein Unterdruck im Nachlauf entstehen kann, scheint hier der statische Erddruck an der Vorderseite des Körpers allein maßgebend zu sein, während der Impuls des bewegten Sandes dagegen vernachlässigbar klein ist. Dem entspricht auch eine sehr kleine *Froude*sche Zahl:

Abb. 4. Seitenansicht.

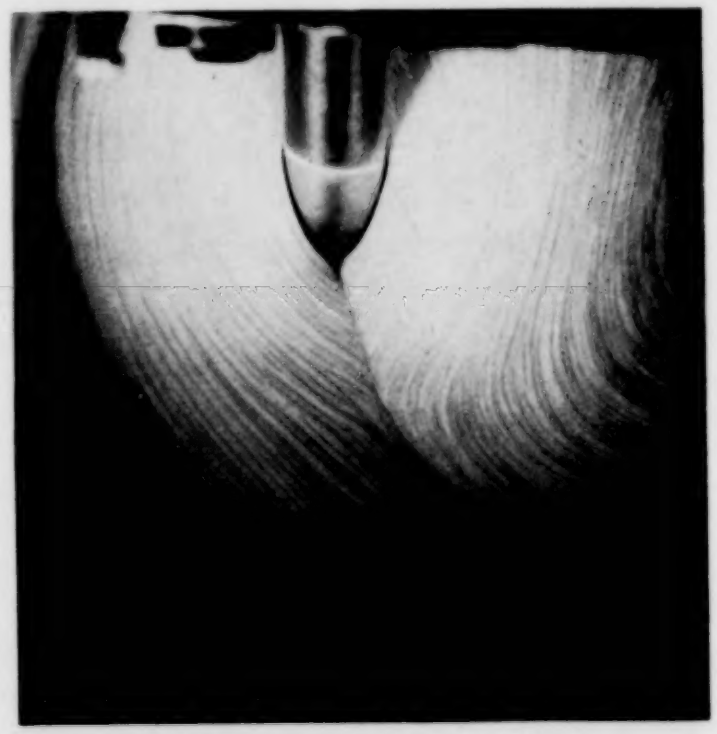

Abb. 5. Zusammenfluß hinter dem Zylinder.

Geschwindigkeit/$\sqrt{gd}$ (g = Erdbeschleunigung, d = Zylinderdurchmesser) = 0,02 bis 0,3 im Versuchsbereich.

Es soll deshalb angenommen werden, daß der Widerstand proportional dem statischen Erddruck auf die Widerstandsfläche

$$W = c_1 \int_0^{-H} K_p \gamma\, y\, d\, dy = \frac{1}{2} c_1 K_p \gamma\, d\, H^2 , \tag{3}$$

ist mit H als Eintauchtiefe. Nach Abb. 6 geben die Versuche tatsächlich

$$W = 25\, \gamma\, d\, H^2,$$

so daß hier $c_1 K_p = 50$ wird.

Als weiteres Beispiel wurde das Widerstandsmoment M_w eines untergetauchten, waagerechten Zylinders gemessen; das kleine Reibungsmoment der Haltestange wurde nach Abb. 1 abgeschätzt und abgezogen. Dieselben Annahmen wie oben geben

$$\frac{1}{2} M_w = c_2 \int_0^{l/2} K_p \gamma\, y\, dr\, dr = \frac{1}{8} c_2 K_p \gamma\, d\, l^2\, H , \tag{4}$$

mit l als Gesamtlänge des Zylinders in einer Tiefe H unter der Oberfläche. Nach Abb. 7 ist experimentell

$$M_w / \frac{1}{4} \gamma\, d\, l^2 = 20\, H ,$$

oder

$$c_2 K_p = 20 .$$

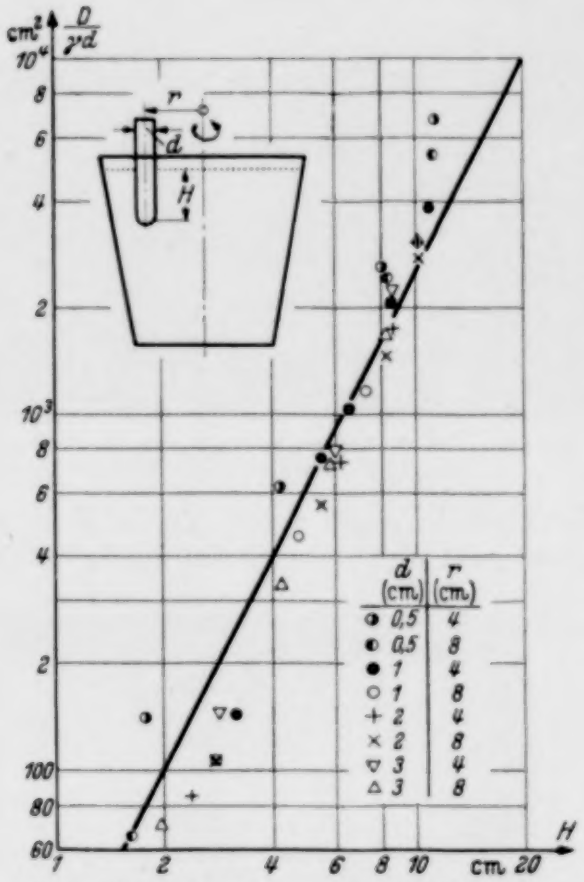

Abb. 6. Widerstand eines exzentrisch eingetauchten Zylinders (Grober Sand).

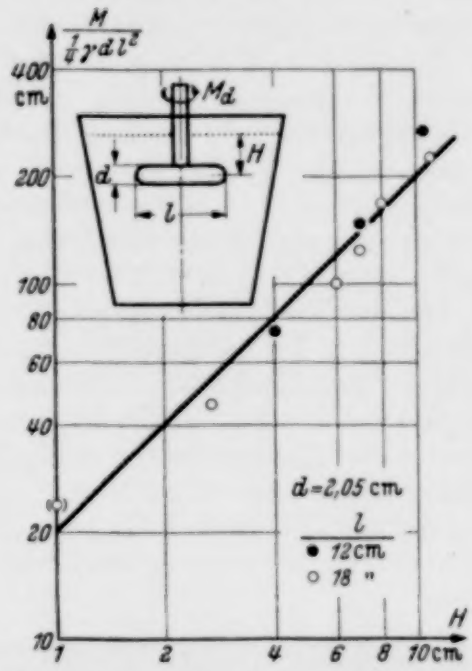

Abb. 7. Moment eines horizontal eingetauchten Zylinders (Grober Sand).

In beiden Fällen geben die Formeln die Abhängigkeit vom Zylinderdurchmesser bzw. der Länge und der Eintauchtiefe richtig wieder, und nur die Zahlenkonstanten müssen den Messungen entnommen werden. In der Statik hängen solche Zahlenfaktoren meist stark von der jeweiligen Porosität ab, sie sind verschieden in loser Schüttung oder in festgestampftem Sand. Bei der obigen Versuchsanordnung kann das aber offenbar keine Rolle spielen, da ja bei jeder Umdrehung immer dieselben Sandmassen aufgewühlt werden und wieder zur Ruhe kommen (im drehenden System), so daß stets der Fall der losen Schüttung vorliegt.

5. Ausfluß aus einem Rohr durch eine Lochblende. Ein anderes Beispiel einer Sandströmung, so alt wie die Sanduhr, ist das Ausfließen von Sand durch ein kleines Loch. Zum Zweck gut definierter Versuchsverhältnisse wurde der Ausfluß aus einem Glasrohr gemessen, das unten durch ein dünnes Blech (0,25 mm) abgeschlossen war, in diesen Mitte ein Loch gebohrt war. Auch hier war es nicht nötig den Einfüllungszustand des Sandes näher zu berücksichtigen; die Ausflußmenge ergab sich unabhängig davon, ob man den Sand vorher in das Rohr durch einen Trichter hineinrieseln ließ (lose Schüttung) oder schichtenweise in das Rohr einstampfte. Denn auch hier sind es im wesentlichen immer dieselben Sandmassen, die an der Bewegung teilnehmen

und dadurch sehr bald nach dem Beginn des Ausfließens aufgelockert werden, so daß wieder der Fall der losen Schüttung vorliegt.

a) Senkrechtes Rohr. Zunächst sei an die bekannte statische Druckverteilung in einem mit Sand gefüllten vertikalen Kreisrohr erinnert, wenn der Boden des Rohres nur durch einen so kleinen Gegendruck gehalten wird, daß der Sand gerade anfängt wegzurutschen. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Drucke unabhängig von der radialen Koordinate sind,

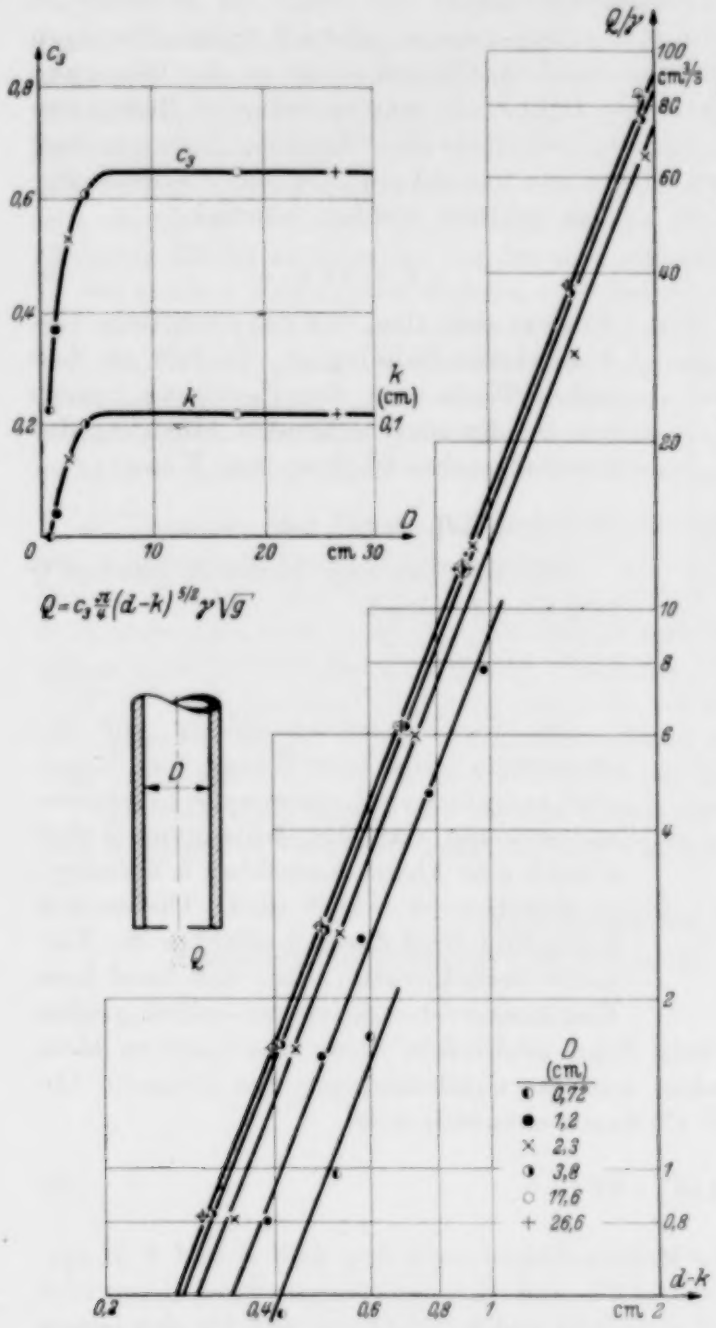

Abb. 8. Ausfluß von grobem Sand durch eine Lochblende (Durchmesser d).

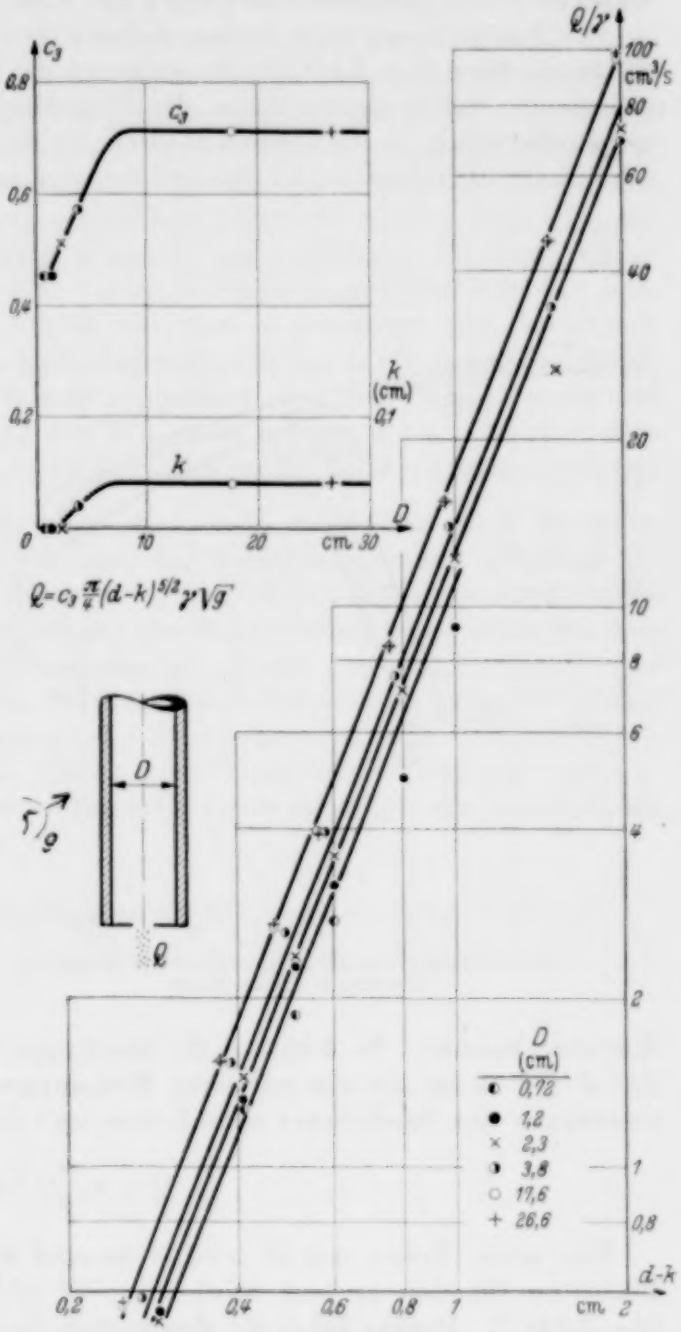

Abb. 9. Ausfluß von feinem Sand durch eine Lochblende (Durchmesser d).

daß wieder $p_h = K_a p_v$ und an der Wand $\tau = \mu_1 p_h$, lautet die Gleichgewichtsbedingung an einem Zylinder der Höhe dh

$$\frac{\pi}{4} D^2 dp_v = \frac{\pi}{4} D^2 \gamma\, dh - \pi D \tau\, dh = \frac{\pi}{4} D^2 \gamma\, dh - \pi D \mu_1 K_a p_v\, dh.$$

Integration gibt den vertikalen Druck am Boden

$$p_v(h = 0) = \frac{\gamma D}{4 \mu_1 K_a} [1 - \exp(-4 \mu_1 K_a H/D)]. \qquad (5)$$

mit D als Rohrdurchmesser und H als Sandhöhe. Sowie die Sandhöhe zwei oder drei Rohrdurchmesser übersteigt, ist also der Bodendruck unabhängig von der Höhe und zwar gleich $\gamma D/4 \mu_1 K_a$. Da der Sand sich hier aktiv verhält, ist der Koeffizient des aktiven Erddrucks K_a

einzusetzen. Passiv würde sich der Sand verhalten, wenn etwa am oberen Ende des Rohres mit einem Kolben ein Druck nach unten ausgeübt würde.

Auf Grund dieser Silo-Gleichung (5) kann auch für den Ausfluß von Sand aus einem solchen Rohr die Sandhöhe keine Rolle spielen, solange sie nicht zu klein ist. Wenn man diese für den Hydrodynamiker ungewohnte Tatsache weiß, ist es leicht, dimensionsanalytisch vorauszusagen, daß die mittlere Ausflußgeschwindigkeit v im Ausflußloch abhängen wird vom spezifischen Gewicht γ, der Erdbeschleunigung g und dem Lochdurchmesser d.

Die Beobachtung zeigt ferner, daß der Sand nur in einem dünnen, schwach trichterförmigen Schlauch über dem Loch fließt, während der übrige Sand rundherum nicht an der Bewegung teilnimmt. Infolgedessen kann der Rohrdurchmesser D nur von untergeordneter Bedeutung sein, außer etwa in sehr dünnen Rohren, wo der Schlauch mit fließendem Sand die Rohrwandung schon kurz über dem Loch erreicht. Aus γ, g und d kann nun nur auf eine Art eine Geschwindigkeit gebildet werden, nämlich

$$v \sim \sqrt{g\,d}\,. \tag{6}$$

Es zeigt sich also, daß das spezifische Gewicht keine Rolle spielt. Es fällt in derselben Weise aus der Rechnung heraus wie bei der entsprechenden Ableitung der Ausflußgeschwindigkeit von Wasser:

$$v \sim \sqrt{g\,H}\,.$$

Die Ausflußmenge in der Zeiteinheit Q in g/s wird danach

$$Q = \frac{\pi}{4}\gamma\, d^2\, v \sim d^{5/2}\,. \tag{7}$$

Da die Versuchsanordnung und die Messungen selbst (mit Waage und Stoppuhr) so einfach sind, streuen die Ergebnisse nur so wenig, daß eine Auftragung Q über d noch eine kleine Korrektur k nahelegt, so daß $Q \sim (d-k)^{5/2}$ wird. Theoretisch betrachtet wird durch k offenbar die Tatsache berücksichtigt, daß der Sand kein Kontinuum ist sondern aus endlich großen Körnern besteht. So kann z. B. überhaupt kein Sand ausfließen, wenn das Loch zu klein ist: $d < k$. k ist als ein mittlerer Wirkungsradius von der Größenordnung der linearen Abmessungen der Sandkörner aufzufassen, und Gl. (7) damit abzuändern in

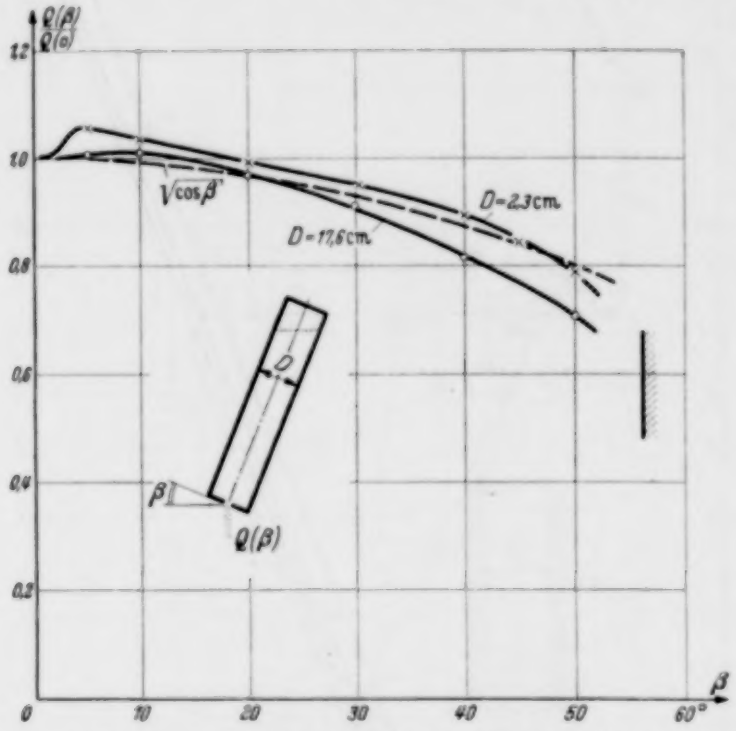

Abb. 10. Ausfluß aus einem geneigten Rohr durch eine Lochblende (feiner Sand).

$$Q = c_3 \frac{\pi}{4}\gamma \sqrt{g}\,(d-k)^{5/2}\,. \tag{8}$$

Für weite Rohre mit $D >$ rd. 8 cm sind die Meßergebnisse nach den Abb. 8 und 9 in cgs-Einheiten für den groben Sand $Q/\gamma = 16\ (d-0{,}11)^{5/2}$ und für den feinen Sand $Q/\gamma = 17{,}6\ (d-0{,}04)^{5/2}$. Daraus folgt für den groben Sand $c_3 = 0{,}65$ und $k = 0{,}11$ cm, und für den feinen Sand $c_3 = 0{,}71$ und $k = 0{,}04$ cm.

Bei engeren Rohren macht sich noch ein Einfluß des Rohrdurchmessers auf c_3 und k bemerkbar, wie in der Nebenfigur in den Abb. 8 und 9 angegeben. Und zwar wird in einem engeren Rohr der Ausfluß durch dieselbe Lochblende kleiner als in einem weiten Rohr, obwohl der Schlauch mit fließendem Sand die Rohrwandung eher erreicht und die Reibung zwischen Glas und Sand wohl kleiner ist als zwischen Sand und Sand. Andrerseits ist dort, wo der Schlauch die Rohrwand erreicht der Druck kleiner im engeren Rohr als im weiten. Denn nach (5) ist der Druck, abgesehen von sehr kleinen Sandhöhen, proportional dem Rohrdurchmesser.

Eine gewisse Bestätigung der Gl. (8) wurde nachträglich in einer Arbeit von *E. C. Bingham* und *R. W. Wikoff*[1] gefunden, die den Ausfluß von Seesand durch Glaskapillaren ($D = 0{,}16$ bis 0,36 cm, Länge 20 cm) gemessen haben. Das würde hier dem Grenzfall Lochdurchmesser = Rohr-

[1] *E. C. Bingham* and *R. W. Wikoff*, The flow of dry sand through capillary tubes. J. Rheology 2 (1931), S. 395—400.

durchmesser entsprechen. Sie faßten die Ergebnisse in einer empirischen Formel zusammen, nach der $Q \sim D^{2{,}65}$. Vermutlich wäre auch hier eine Darstellung durch $Q \sim (D-k)^{2{,}5}$ treffender.

b) Ausfluß aus einem geneigten Rohr. Das Verhältnis des Ausflusses aus einem geneigten Rohr (Winkel β gegen die Senkrechte) zu dem aus dem gleichen, aber senkrecht gestellten Rohr ist praktisch unabhängig vom Lochdurchmesser und hängt nur wenig vom Rohrdurchmesser ab. Nach der obigen Abschätzung ist $v \sim \sqrt{g\,d}$; wenn man jetzt g ersetzt durch $g \cos\beta$, so wäre zu erwarten $Q(\beta)/Q(0) = \sqrt{\cos\beta}$. In Wirklichkeit ist jedoch nach Abb. 10 überraschenderweise der Ausfluß bei kleinen Winkeln β etwas größer als aus dem senkrechten Rohr. Offenbar ist hier die kleinere Reibung zwischen Glas und Sand entscheidend, da beim geneigten Rohr ein größerer Teil des Schlauches mit fließendem Sand von der Rohrwandung gebildet wird, — vor allem in einem engen Rohr. Es könnte aber auch eine Folge des vergrößerten Porenvolumens sein, durch die der Ausfluß durch kleineren Druck erleichtert würde; in diesem Fall wäre ein kleinerer Effekt zu erwarten bei Seesand mit runden Körnern und geringerer Dilatanz.

Bei starker Neigung des Rohres, etwa bei $\beta = 90° - \varphi$ (φ = Böschungswinkel) hört der Ausfluß natürlich gänzlich auf. Davor tritt bei etwa $\beta \gtrsim 40°$ eine Art „Kavitation" auf. Im oberen Teil des Rohres rieselt der Sand dann so langsam nach, daß weiter unten das Volumenverhältnis Sand zu Luft zu stark unter den Normalwert fällt und schließlich eine Luftblase entsteht und hochsteigt, was an einer wellenförmigen Bewegung des Sandes zu erkennen ist. (Es sind dies nicht etwa Luftblasen, die am unteren Rohrende durch das Loch in das Rohr gekommen wären.)

6. Versuche, das Geschwindigkeitsfeld auszumessen. Es wurde schließlich noch versucht, das Geschwindigkeitsfeld zu ermitteln durch Ausmessen der Verformung von Schichten gefärbten Sandes. Der Ausfluß aus einem weiten Glasrohr ($D = 17{,}6$ cm) durch ein Loch wurde dazu etwa aller halben oder ganzen Minute unterbrochen. Der Schlauch mit rieselndem Sand ist unten, über dem Loch, kegelförmig (gesamter Öffnungswinkel: grober Sand 25,2°, feiner Sand 16,8°.) Wenn die Sandhöhe groß genug ist, ist der Schlauchdurchmesser oben nahezu konstant (vor allem in feinem Sand). Dementsprechend nimmt die Sandgeschwindigkeit auf der Mittellinie nach oben in Lochnähe quadratisch ab mit der Höhe, und ist im oberen Teil nahezu konstant.

Um mehr Einzelheiten zu ermitteln wären weitere Versuche dieser Art nötig, die jedoch durch den Wegzug des Verfassers unterbrochen wurden.

(Eingegangen am 24. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Wieghardt*, „Uplands" Tilford, Surrey (England).

Der Einfluß der Querschnittsform auf das Verhalten von Bourdonfedern.

Von W. Wuest.

1. Einführung. Kreisförmig gekrümmte Röhrenfedern von ovaler Querschnittsform, sog. *Bourdonfedern*, werden in der Technik als Druckmeßelemente benutzt und in großen Mengen erzeugt. Während man ursprünglich eine ellipsenähnliche Ovalform bevorzugte, ist man in den letzten Jahrzehnten, wohl vorwiegend aus fertigungstechnischen Gründen, immer mehr zur Flachbogenform (vgl. Abb. 1) übergegangen. Bei gegebener Querschnittsform (z.B. Ellipse, Flachbogen u.a.) ist das Verhalten dünnwandiger Röhrenfedern vor allem durch das Achsenverhältnis α und den Parameter $\lambda = a^2/s\,r$ (a große Querschnittshalbachse, s Wandstärke, r Krümmungshalbmesser) bestimmt. Für Querschnittsformen, die abschnittsweise aus Kreisbögen oder Geradenstücken zusammengesetzt sind (Korbbogen mit den Sonderfällen Spitzbogen und Flachbogen, vgl. Abb. 1) sind Berechnungsgrundlagen von *M. Tueda*[1] entwickelt worden. Eine erhebliche Vereinfachung dieser Theorie ist vom Vf. vorgenommen worden und die Rechnung für den praktisch fast ausschließlich interessierenden Flachbogen numerisch durchgeführt und durch zahlreiche Messungen nachgeprüft worden[2]. Neuerdings haben *R. A. Clark* und *E. Reissner*[3] eine Theorie der Röhrenfedern von elliptischem Querschnitt entwickelt. Die Ergebnisse dieser Theorie stehen jedoch in Widerspruch zu Messungen, die von einem früheren Mitarbeiter des Verfassers mit Röhrenfedern von elliptischem Querschnitt durchgeführt worden sind. Die bei den Messungen verwandten Röhrenfedern sind zunächst mit elliptischen Ziehdornen gezogen worden. Doch besteht immerhin die Möglichkeit, daß bei dem „Rollvorgang", bei dem das ursprünglich gerade Rohr eine kreisförmige Krümmung erhält, die elliptische Form nicht streng erhalten blieb. Für eine Entscheidung über die Gültigkeit der *Reissner*schen Theorie wird man also weitere sorgfältige Messungen abwarten müssen. Solche Messungen sind auch deswegen von praktischem Interesse, weil die *Reissner*sche Theorie einen unerwartet hohen Einfluß der Querschnittsform anzeigt. Möglicherweise kann man bei dünnwandigen Röhrenfedern Querschnittsformen mit günstigeren Eigenschaften finden.

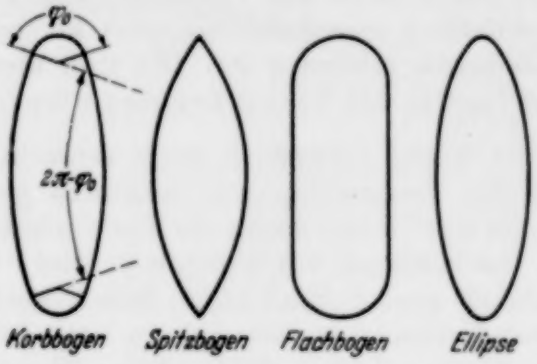

Abb. 1. Verschiedene Querschnittsformen von Röhrenfedern.

Eine erhebliche Vereinfachung der Theorie ist in folgenden beiden Fällen möglich:

1. λ klein (etwa < 1), α beliebig.
2. λ beliebig, α klein.

Der erste Grenzfall entspricht der „Mitteldruckfeder", d.h. bei üblichen Abmessungen ist diese Vereinfachung zulässig für Röhrenfedern, deren Nenndruck (Größtwert des Innendruckes) größenordnungsmäßig 50 at überschreitet, und bis zu einigen 100 at betragen kann. Die Mitteldruckfedern liegen also im Grenzgebiet zwischen den dünnwandigen Niederdruckfedern und den dickwandigen Hochdruckfedern. Die Berechnung von Mitteldruckfedern ist in vielen Fällen analytisch möglich[4]. Für beliebige Querschnittsformen haben *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch*[5] ein numerisches Differenzenverfahren entwickelt, dessen Gültigkeitsbereich durch mehrfache Iteration bis etwa $\lambda = 3$ ausgedehnt werden kann.

---

[1] *M. Tueda*, Mem. Coll. Engin. Kyoto (Japan) (1934/35), H. 8 und (1935/37), H. 9. Die dort abgeleiteten Gleichungen enthalten jedoch einen Fehler.

[2] Ergebnisse der Rechnung s. *W. Wuest*, Technik 3 (1948), S. 23; vgl. auch Bild 4 der vorliegenden Arbeit.

[3] *R. A. Clark* und *E. Reissner*, J. appl. Physics 21 (1950), S. 1340. *R. A. Clark*, *T. I. Gilroy* und *E. Reissner*, J. appl. Mech. Paper No. 51—A—11 (1951).

[4] Einige Berechnungsbeispiele finden sich in Technik 3 (1948), S. 24, Bild 3.

[5] *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch*, Proc. Amsterdam 44 (1940), S. 779 u. 914.

Auch im zweiten Grenzfall, nämlich für sehr kleines Achsenverhältnis des Querschnitts tritt eine erhebliche Vereinfachung ein. Dieser Grenzfall soll im folgenden näher untersucht und auf die Berechnung beliebiger Querschnittsformen angewandt werden. Veranlaßt wurde diese Untersuchung durch die Unstimmigkeiten zwischen der *Reissner*schen Theorie und den oben genannten Messungen. Aus diesem Grunde werden auch vor allem ellipsenähnliche Querschnittsformen untersucht. Die Ergebnisse dieser Näherungsrechnung bestätigen eher die Messungen als die *Reissner*sche Theorie.

2. Ableitung der Grundgleichungen und der Randbedingungen. Dünnwandige Röhrenfedern fallen vom Standpunkt der Festigkeitslehre unter den Begriff Umdrehungsschalen. Jedoch ist der Ring bei der Röhrenfeder nicht geschlossen, sondern weist gewöhnlich einen Windungswinkel von etwa 270° auf. Die Röhrenfeder ist am einen Ende im Federträger (Abb. 2a) befestigt, der zugleich die Druckzuführung enthält, während das freie Ende der Feder durch ein Federendstück verschlossen ist. Wir setzen voraus, daß die Röhrenfeder nur durch einen gleichmäßigen Innendruck p und allenfalls durch ein am freien Ende einwirkendes Moment M belastet ist. Die Belastung ist also kreissymmetrisch und daher auch die Spannungsverteilung abgesehen von den beiden Enden, unabhängig vom Winkel ψ (Abb. 2a). Der Querschnitt (Abb. 2b) wird als doppeltsymmetrisch vorausgesetzt. (Diese Voraussetzung ist für die folgende Rechnung zwar nicht notwendig, doch ist sie in fast allen praktischen Fällen erfüllt.) Als Achsenlängen a, b, der Mittelfläche bezeichnen wir die Achsenlänge des umschriebenen Rechtecks. Die Mittelfläche des doppelt-symmetrischen Querschnitts sei durch folgende Funktion gegeben:

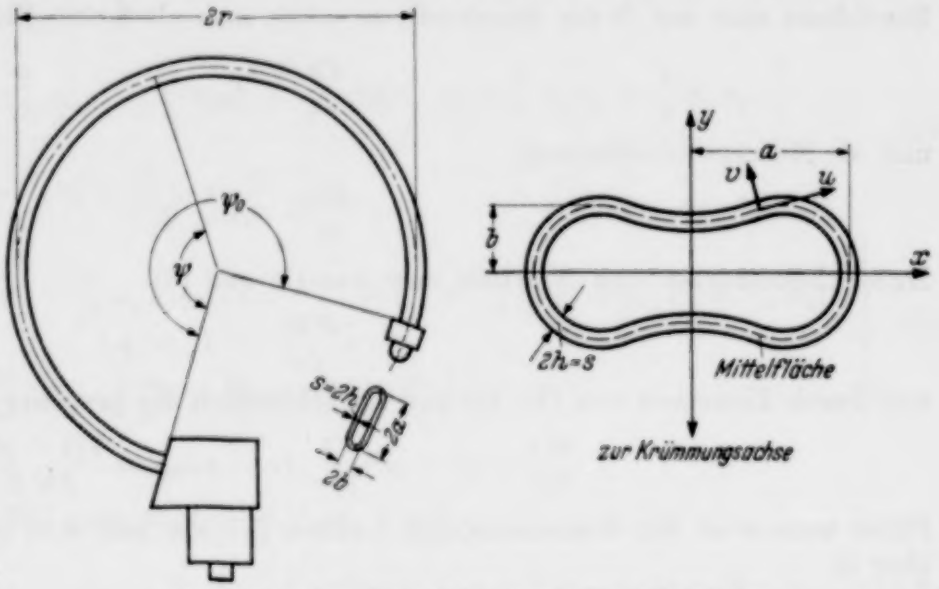

Abb. 2. Bezeichnungen zur Berechnung von Röhrenfedern.
a) Gesamtansicht b) Röhrenfeder-Querschnitt.

$$y = \pm b f(x),$$

wobei $f(x)$ eine gerade Funktion von x ist. Das Achsenverhältnis $\alpha = b/a$ wird als sehr klein vorausgesetzt und soll im Grenzfall gegen 0 gehen. Wegen dieser Annahme fallen die tangentialen Verschiebungen u und die normalen v (vgl. Abb. 2b) im Grenzfall in die Achsenrichtungen, wodurch sich erhebliche Vereinfachungen ergeben. Wegen der vorausgesetzten doppelten Symmetrie der Querschnittsform können wir die Rechnung auf einen Quadranten beschränken. Bezeichnen wir den Abstand von der Mittelfläche mit z $(-h \leq z \leq h)$, so erhält man für die tangentielle Dehnung ε_x und die Ringdehnung ε_ψ im Grenzübergang $\alpha \to 0$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z\,\frac{d^2v}{dx^2}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{v}{r} - \frac{y}{r}\,\omega_0. \tag{2}$$

Hierbei ist $\omega_0 = \Delta\psi_0/\psi_0$ die relative Winkeländerung, die als positiv angenommen wird, wenn die Feder sich aufbiegt, wie es normalerweise unter der Wirkung des Innendruckes geschieht.

Die tangentiale Spannung σ_x und die Ringspannung σ_ψ ergibt sich dann zu

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\psi),$$

$$\sigma_\psi = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\psi + \mu\varepsilon_x).$$

Durch Integration über die Wanddicke erhält man daraus die Zugkräfte T_x und T_ψ sowie das

Moment M_x:

$$T_x = \frac{2\,h\,E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dx} + \mu\left(\frac{v}{r} - \frac{y}{r}\,\omega_0\right)\right], \tag{3}$$

$$T_\psi = \frac{2\,h\,E}{1-\mu^2}\left(\frac{v}{r} - \frac{y}{r}\,\omega_0 + \mu\,\frac{du}{dx}\right). \tag{4}$$

$$M_x = -\frac{2\,h^3\,E}{3\,(1-\mu^2)}\,\frac{d^2v}{dx^2}. \tag{5}$$

Im Grenzfall $\alpha \to 0$ geht auch $T_x \to 0$. Daraus folgt

$$\frac{du}{dx} = -\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{y}{r}\,\omega_0\right). \tag{6}$$

Bezeichnet man mit N die Querkraft, so erhält man als Kräftegleichgewicht in der ψ-Richtung

$$-r\,\frac{dN}{dx} + T_\psi = p\,r \tag{7}$$

und als Momentenbedingung:

$$\frac{dM_x}{dx} - N = 0. \tag{8}$$

Durch Elimination von N erhält man aus (7) und (8):

$$-r\,\frac{d^2M_x}{dx^2} + T_\psi = p\,r$$

und durch Einsetzen von (4), (5) und (6) schließlich die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{d^4\,v}{dx^4} + (1-\mu^2)\,\frac{3}{h^2\,r^2}\,(v - y\,\omega_0) = \frac{3\,(1-\mu^2)}{2\,h^3\,E}\,p.$$

Führt man noch die dimensionslosen Größen $\xi = x/a$ und $w = v/a$ ein, geht diese Gleichung über in

$$w^{IV}(\xi) + 4\,n^4\,w = 4\,n^4\,[\alpha\,\omega_0\,f(\xi) - A] \tag{9}$$

mit den Abkürzungen

$$4\,n^4 = (1-\mu^2)\,\frac{3\,a^4}{r^2\,h^2}, \qquad A = \frac{3\,(1-\mu^2)\,a^3}{8\,n^4\,h^3}\,\frac{p}{E}. \tag{9a, b}$$

Die Randbedingungen lauten

$$\xi = \pm 1 : w = w' = 0\,.$$

Aus (4) und (6) findet man die Ringkraft

$$T_\psi = \frac{2\,h\,E}{r}\,(v - y\,\omega_0)\,. \tag{10}$$

Das Moment der Ringkräfte muß aber gleich dem von außen auf die Feder einwirkenden Moment sein, d. h.

$$M = 4\int_0^a T_\psi\,y\,dx = 8\,\alpha\,\frac{a^3\,h\,E}{r}\int_0^1 (w - \alpha\,\omega_0 f)\,f\,d\xi\,. \tag{11}$$

Bei einer nur durch den Innendruck belasteten Feder ist $M = 0$, so daß man die relative Winkeländerung ω_0 berechnet zu

$$\omega_0 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\int_0^1 w\,f\,d\xi}{\int_0^1 f^2\,d\xi}\,. \tag{12}$$

3. Allgemeine Lösung und Anwendung auf Sonderfälle. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (9) ist

$$w = A\,(1 + C_1\,\mathfrak{Cof}\,n\xi\,\cos n\,\xi + C_2\,\mathfrak{Sin}\,n\xi\,\sin n\,\xi + n\alpha\omega_0\int_0^\xi w^*(\xi - \xi')\,f(\xi')\,d\xi'\,, \tag{13}$$

mit

$$w^*(\xi) = \mathfrak{Cof}\,n\xi\,\sin n\xi - \mathfrak{Sin}\,n\xi\,\cos n\xi\,.$$

Hierbei ist schon berücksichtigt, daß die Lösung eine gerade Funktion in ξ sein muß. Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 ergeben sich dann aus den Randbedingungen $w = w' = 0$ für $\xi = 1$. In vielen Fällen kann aber die Lösung explizit angegeben werden, insbesondere in folgenden:

a) $f(\xi)$ durch trigonometrische oder Exponentialfunktionen gegeben,

b) $f(\xi)$ durch ein Polynom in ξ gegeben.

Weiterhin soll insbesondere der Fall b) näher untersucht werden, und zwar werden wir uns auf ein Polynom sechsten Grades beschränken. Die Funktion $f(\xi)$ sei also gegeben durch

$$f(\xi) = a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + a_6\xi^6. \tag{14}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (9) ist dann

$$w = A(1 + C_1 \mathfrak{Cof}\, n\xi \cos n\xi + C_2 \mathfrak{Sin}\, n\xi \sin n\xi) + \left(f(\xi) - \frac{6}{n^4} a_4 - \frac{90}{n^4} a_6 \xi^2\right) \varkappa \omega_0 . \tag{15}$$

Die Integrale in (11) und (12) werden

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 f^2\, d\xi = a_0^2 + \frac{2}{3} a_0 a_2 + \frac{2}{5} a_0 a_4 + \frac{2}{7} a_0 a_6 \frac{1}{5} a_2^2 + \frac{2}{7} a_2 a_4 + \frac{2}{9} a_2 a_6 \\ + \frac{1}{9} a_4^2 + \frac{2}{11} a_4 a_6 + \frac{2}{13} a_6^2, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 w f\, d\xi = \varkappa \omega_0 \int_0^1 f^2\, d\xi + \left(A - \frac{6}{n^4} a_4 \varkappa \omega_0\right)\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7}\right) + A(C_1 F_1 + C_2 F_2) \\ - \frac{90}{n^4} a_6 \varkappa \omega_0 \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7} + \frac{a_6}{9}\right), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_1(n) = {} & \frac{1}{2n} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n + \mathfrak{Cof}\, n \sin n)(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) \\ & - \frac{1}{n^2} \mathfrak{Sin}\, n \sin n\, (a_2 + 2a_4 + 3a_6) - \frac{1}{n^3} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n - \mathfrak{Cof}\, n \sin n)(a_2/2 + 3a_4 + 15/2\, a) \\ & + \frac{1}{n^4} \mathfrak{Cof}\, n \cos n\, (6a_4 + 30a_6) - \frac{1}{n^5} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n + \mathfrak{Cof}\, n \sin n)(3a_4 + 45a_6) \\ & + \frac{1}{n^6} \mathfrak{Sin}\, n \sin n\, 90 a_6 + \frac{1}{n^7} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n - \mathfrak{Cof}\, n \sin n)\, 45\, a_6 \end{aligned} \tag{17a}$$

$$\begin{aligned} F_2(n) = {} & -\frac{1}{2n} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n - \mathfrak{Cof}\, n \sin n)(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) \\ & + \frac{1}{n^2} \mathfrak{Cof}\, n \cos n\, (a_2 + 2a_4 + 3a_6) - \frac{1}{n^3} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n + \mathfrak{Cof}\, n \sin n)(a_2/2 + 3a_4 + 15/2\, a_6) \\ & + \frac{1}{n^4} \mathfrak{Sin}\, n \sin n\, (6a_4 + 30a_6) + \frac{1}{n^5} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n - \mathfrak{Cof}\, n \sin n)(3a_4 + 45a_6) \\ & - \frac{1}{n^6} \mathfrak{Cof}\, n \cos n\, 90 a_6 + \frac{1}{n^7} (\mathfrak{Sin}\, n \cos n + \mathfrak{Cof}\, n \sin n)\, 45\, a_6 . \end{aligned} \tag{17b}$$

ist.

4. Kenngrößen der Röhrenfeder. Bevor wir zur zahlenmäßigen Berechnung von Beispielen übergehen, sollen aus den im vorigen Abschnitt entwickelten Beziehungen die für die praktische Anwendung wichtigen Kenngrößen der Röhrenfeder abgeleitet werden. Ausgangspunkt ist einerseits die Gleichung (11), die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\omega_0 = c_p p + c_M M . \tag{18}$$

Andrerseits ist für die Beanspruchung vor allem die größte Biegespannung[1] maßgebend, die an den Enden der großen Achsen erreicht wird, nämlich

$$\sigma_B = w''(1) \frac{h}{a} \frac{E}{1 - \mu^2} .$$

[1] Für große Werte λ kann die Zugspannung am Ende der großen Achse wesentlich werden. Sie ist offenbar nach Gl. (5) und (8) gegeben durch $\frac{1}{2h} N(1) = w^{\mathrm{III}}(1) \frac{h^2 E}{3(1 - \mu^2)}$.

Diese Beziehung läßt sich auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_B &= d_p\, p + d_\omega\, \omega_0 \\ &= (d_p + d_\omega c_p)\, p + d_\omega c_M M\,.\end{aligned}\right| \tag{19}$$

Die Koeffizienten c_p, c_M, d_p, d_ω können aus der in Ziff. 3 entwickelten Lösung errechnet und auf folgende Form gebracht werden:

$$c_p = (1-\mu^2)\,\frac{a^3}{s^3}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{E}\,F_1\,. \tag{20}$$

Hierbei ist $s = 2h$ die Wanddicke und die Funktion F_1 außer von der gewählten Querschnittsform nur vom Parameter $\lambda = a^2/rs$ beziehungsweise von $n = \sqrt[4]{3\,(1-\mu^2)\,\lambda^2}$ abhängig. Der Koeffizient c_p ist maßgebend für die „Druckempfindlichkeit" der Röhrenfeder. Der Praktiker interessiert sich statt dessen mehr für den vom Federende zurückgelegten Weg f, der daraus berechnet wird zu

$$f = c_p\, \psi_0\, k\, p\,. \tag{21}$$

Hierbei ist ψ_0 der Windungswinkel der Feder und k der Abstand des Federendes vom „Polarpunkt" der Feder[1]. Bei dem häufig angewandten Windungswinkel $\psi_0 = 3/2\,\pi$ ist $k = 1{,}25\,r$.

Die Größe $1/c_M \psi_0$ ist ein Maß für die Federsteife und soll als spezifisches Richtmoment bezeichnet werden. Man kann diese Größe auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{c_M \psi_0} = \frac{EJ}{\psi_0 r}\,F_2\,, \tag{22}$$

wobei das geometrische Trägheitsmoment J sich errechnet zu

$$J = 4 \cdot \alpha^2 a^3 s \int_0^1 f^2\, d\xi\,.$$

Der Koeffizient F_2 gibt also Auskunft darüber, inwieweit die Steifigkeit eines Hohlquerschnitts gegenüber einem Vollquerschnitt von gleichem geometrischen Trägheitsmoment vermindert wird. Für kleine Werte von λ nähert sich F_2 dem Wert 1.

Den Koeffizienten $d_p + d_\omega c_p$ für die größte Biegespannung unter der Wirkung des Innendruckes schreiben wir in der Form

$$d_p + d_\omega\, c_p = \left(\frac{a}{s}\right)^2 \cdot F_3\,. \tag{23}$$

Schließlich führen wir noch ein

$$d_p/(d_p + d_\omega\, c_p) = F_4\,. \tag{24}$$

Die Funktion F_4 hat eine wichtige Bedeutung für die Berechnung der Überdrucksicherheit der Röhrenfeder durch Abfangen und der Belastungsfähigkeit von dynamischen Differenzdruckmessern[2]. Die Gleichung (19) für die maximale Biegespannung kann nämlich auf folgende Form gebracht werden:

$$\sigma_B = \left(\frac{a}{s}\right)^2 F_3 \left(F_4\, p + \frac{1-F_4}{c_p}\,\omega_0\right). \tag{25}$$

Bei dünnwandigen Röhrenfedern wird eine beschränkte Überdrucksicherheit dadurch erzielt, daß die Feder bei einem bestimmten Enddruck abgefangen wird, also an einer weiteren Krümmungsänderung gehindert wird. Wenn $F_4 < 1$, wie es bei dünnwandigen Röhrenfedern immer der Fall ist, steigt die Beanspruchung nach dem Abfangen mit steigendem Druck geringer an, als es ohne Abfangen der Fall sein würde. Findet das Abfangen bei einem Druck p^* statt, so ist die maximale Biegespannung für $p > p^*$

$$\sigma_B = \left(\frac{a}{s}\right)^2 F_3 \left[p^* + F_4\,(p - p^*)\right]. \tag{26}$$

Dieser Vorgang ist in Abb. 3 dargestellt. Als Beispiel ist eine Feder gewählt, die bei einem Nenndruck von 2,5 kg/cm² eine maximale Biegespannung von 25 kg/mm² erreichend möge. F_4 wird zu 0,2 angenommen. Die gleiche Feder werde jetzt bei 1,6 kg/cm² Innendruck abgefangen. Der Druck kann jetzt bis auf 6,1 kg/cm² erhöht werden, ehe die gleiche Beanspruchungsgrenze erreicht wird (Kurve a' in Abb. 3).

[1] *W. Wuest*, Z. Instrumentenkunde 63 (1943), S. 416.
[2] *W. Wuest*, Arch. Techn. Messen V 1343–5 (Juni 1948).

. Eine weitere Anwendung bezieht sich auf dynamische Differenzdruckmesser, bei denen zwei gleiche Federn fest miteinander verbunden sind, so daß eine Krümmungsänderung nur bei einer Differenz der Richtmomente eintritt, während sie sich bei gleichem Innendruck gegenseitig in der Bewegung hindern. Bei ungleichem Druck beträgt natürlich der Federweg nur die Hälfte des Weges einer entsprechenden freien Feder. Bezeichnet man den niedrigeren Druck mit p_1, den höheren mit p_2, so ist die größte Biegespannung bei der höher beanspruchten Feder offenbar

$$\sigma_B = \left(\frac{a}{s}\right)^2 F_3 \left[F_4 p_2 + \frac{1 - F_4}{2}(p_2 - p_1)\right], \quad (27)$$

$$\sigma_B = \left(\frac{a}{s}\right)^2 F_3 \left[F_4 p_1 + \frac{1 - F_4}{2}(p_2 - p_1)\right]. \quad (27a)$$

Baut man mit den gleichen Federn wie im obigen Beispiel einen Differenzdruckmesser für 2,5 kg/cm² Differenzdruck, so darf, wie man aus Abb. 3 ersieht, p_2 bei gleicher zulässiger Beanspruchung den Wert $p_2 = 7{,}5$ kg/cm² erreichen. (Kurve a—b' in Abb. 3).

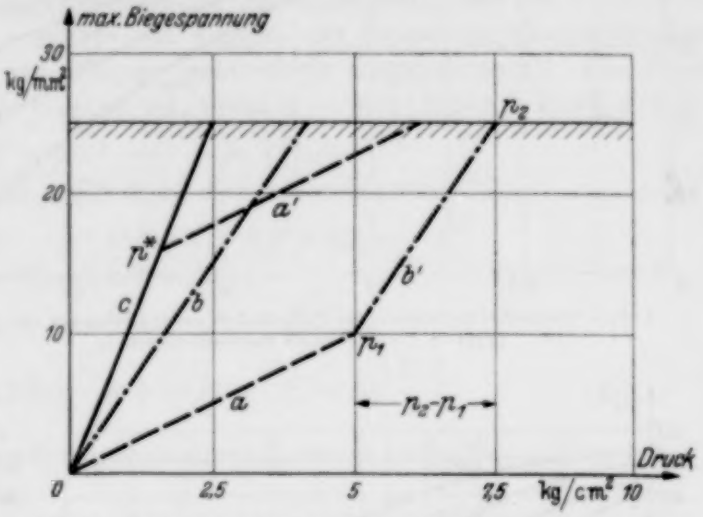

Abb. 3. Erläuterungsbeispiel für die Überdrucksicherheit von Röhrenfedern und das Verhalten von dynamischen Differenzdruckmessern.

5. Berechnungsbeispiele. a) $a_0 = 1$, $a_2 = a_4 = a_6 = 0$. Dies entspricht also dem Grenzfall des Rechteck- oder Flachbogenquerschnittes von kleinem Achsenverhältnis. Man erhält hier für die Funktionen F_1, F_2, F_3 und F_4 das einfache Ergebnis

$$F_1 = 3\,\frac{n\,F(n) - 1}{n^4}, \qquad F_4 = \frac{1}{n\,F(n)}, \qquad F_3 = \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,2n - \sin 2n}{n\,\mathfrak{Cof}\,2n - \cos 2n},$$

mit

$$F(n) = \frac{\mathfrak{Sin}\,2n + \sin 2n}{\mathfrak{Cof}\,2n - \cos 2n}.$$

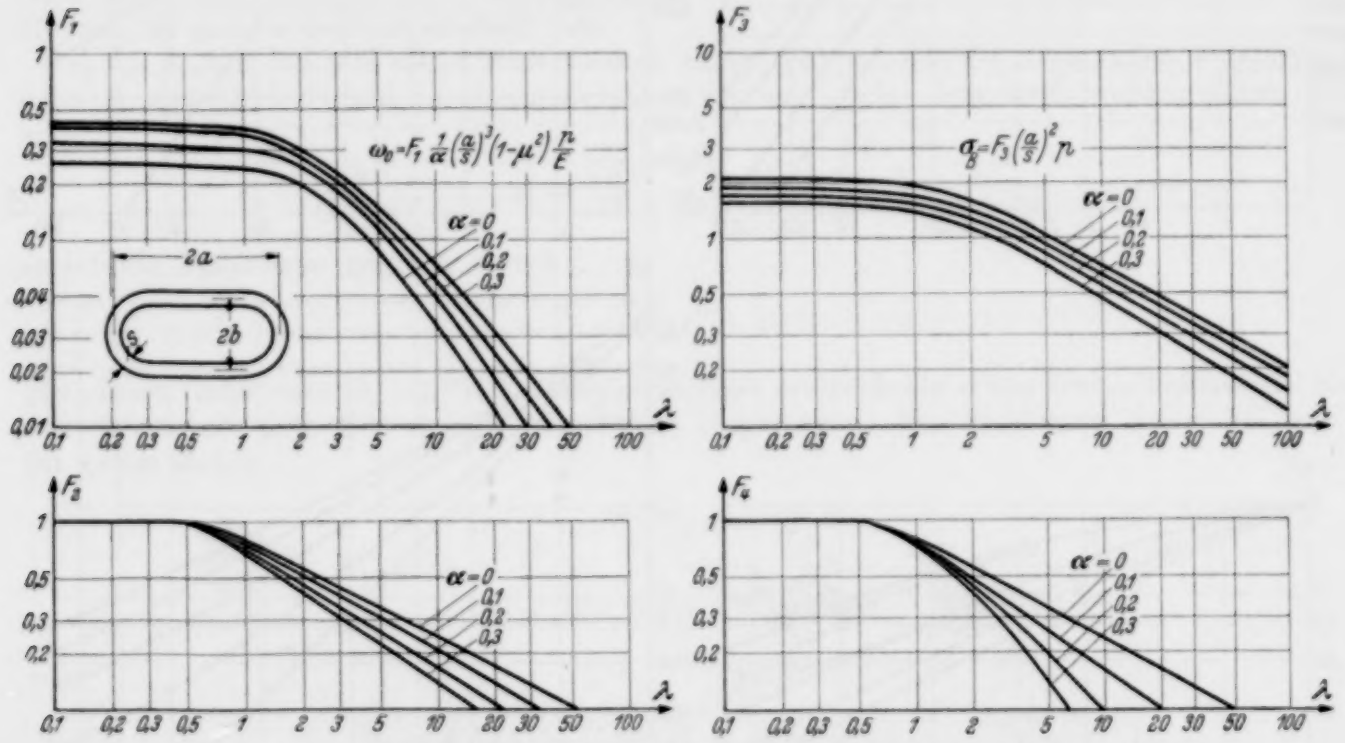

Abb. 4 a, b, c, d. Hilfsfunktionen zur Berechnung von Röhrenfedern mit Flachbogenquerschnitt.

In Abb. 4 sind diese Funktionen in Abhängigkeit von

$$\lambda = \frac{a^2}{sr} = \frac{n^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

aufgetragen. Aus einer unveröffentlichten Arbeit des Vf. sind diese Funktionen für den Flach-

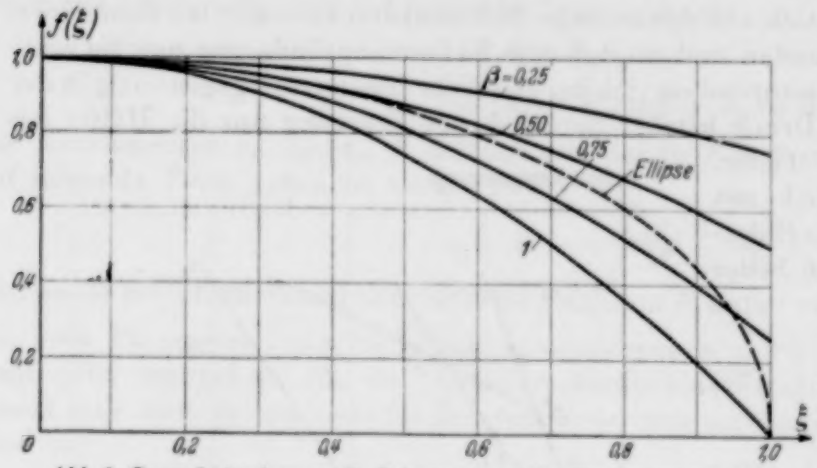

Abb. 5. Querschnittsformen, die Polynomen zweiten Grades entsprechen [$f(\xi) = 1 - \beta\xi^2$ nach Rechenbeispiel b].

bogenquerschnitt auch bei endlichen Achsenverhältnissen entnommen worden[1]. Man kann aus dieser Gegenüberstellung einen Anhalt gewinnen, wie weit die Grenzkurven für $\alpha = 0$ ein qualitatives Bild des allgemeinen Falles ergeben. Die F_1-Kurven verschiedener Achsenverhältnisse weichen voneinander weniger ab als die

[1] Die vier Diagramme sind bereits in einem früheren Aufsatz [Technik 3 (1948), S. 23] veröffentlicht worden. Wegen eines dort vorhandenen Bezeichnungsfehlers werden sie hier erneut abgebildet.

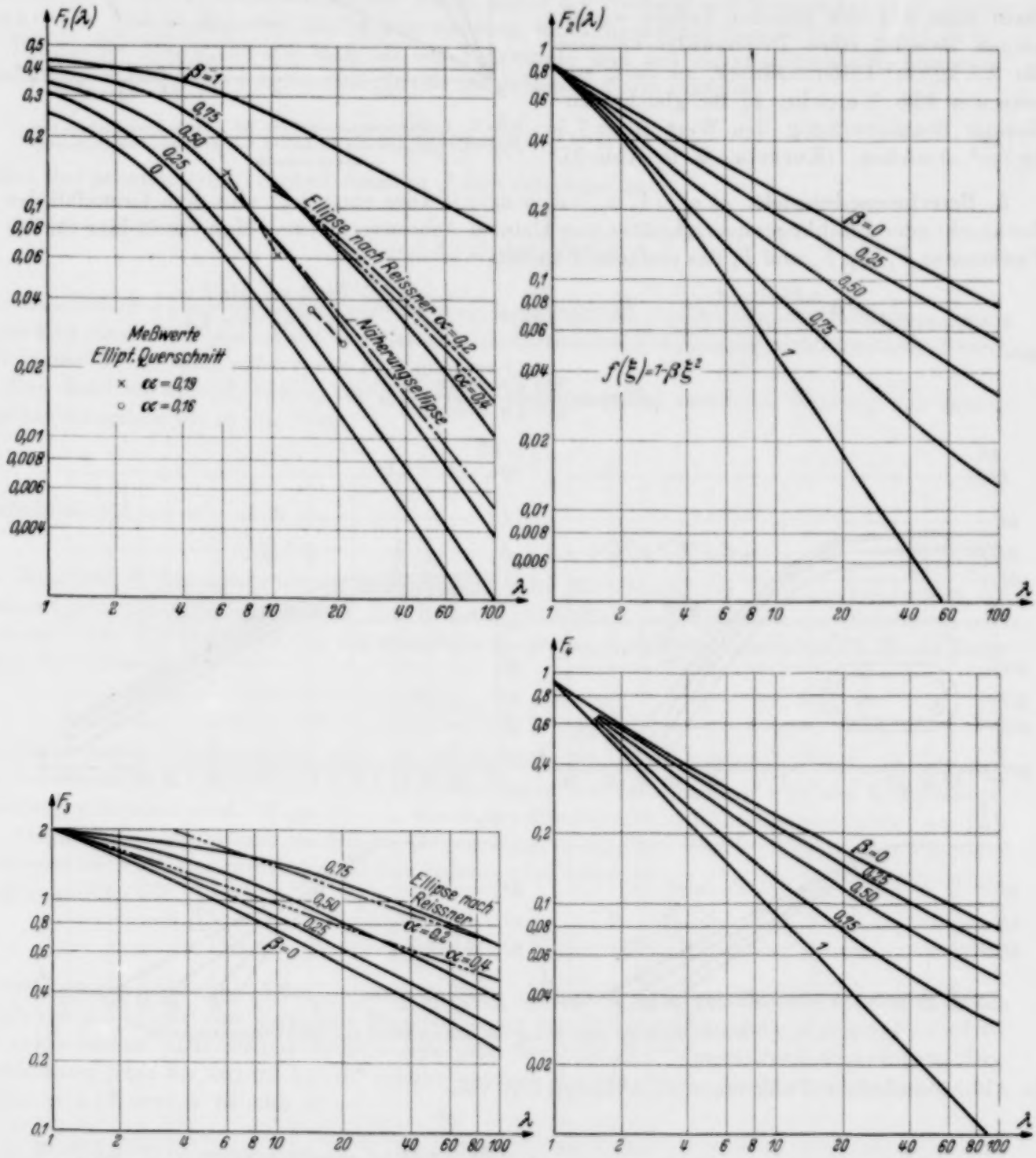

Abb. 6. a, b, c, d. Hilfsfunktionen zur Berechnung von Röhrenfedern verschwindend kleinen Achsenverhältnisses mit Querschnittsformen nach Abb. 5.

übrigen Kurvenscharen. Es ist sogar zu erwarten, daß sie bei einem elliptischen Querschnitt noch enger zusammenliegen, wie man aus dem Verhalten bei kleinen λ-Werten schließen kann. Auch die Ergebnisse der *Reißner*schen Theorie, die allerdings nicht gesichert sind, weisen in diese Richtung (vgl. Abb. 6a).

b) $a_0 = 1$, $a_2 = -\beta$, $a_4 = a_6 = 0$. In Abb. 5 sind verschiedene Querschnittsformen für $\beta = 0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75$ und 1 aufgetragen. Der Wert $\beta = 1$ entspricht angenähert einem spitzbogenförmigen Querschnitt, $\beta = 0{,}5$ im mittleren Bereich einer Ellipse (gestrichelt eingezeichnet). Die Funktionen F_1, F_2, F_3 und F_4 nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn $n = m\pi$ (m ganze Zahl) nämlich

$$F_1(n) = 3\,\frac{1 - \beta/3 - \beta/n^2 - (1-\beta)\,\mathfrak{Tg}\,n/n}{2\beta(1-\beta)n^2 + (1-\beta)^2 n^3\,\mathfrak{Tg}\,n + 2\beta^2 n\,\mathfrak{Ctg}\,n - \beta^2},$$

$$F_2(n) = \frac{2\beta(1-\beta)n^2 + (1-\beta)^2 n^3\,\mathfrak{Tg}\,n + 2\beta^2 n\,\mathfrak{Ctg}\,n - \beta^2}{n^4(1 - 2\beta/3 + \beta^2/5)},$$

$$F_3(n) = 3/n^2 + (2n\beta\,\mathfrak{Ctg}\,n + n^2(1-\beta) - \beta)\,F_1,$$

$$F_4(n) = 1\Big/\left\{1 + n^2\left[[2n\beta\,\mathfrak{Ctg}\cdot n + n^2(1-\beta) - \beta]\,\frac{F_1}{3}\right]\right\}.$$

Wenn $\mathfrak{Tg}\,n$ und $\mathfrak{Ctg}\,n$ gegenseitig vertauscht werden, gelten diese Formeln auch für $n = (2m+1)\pi/2$. Für $n = 0$ ergeben sich folgende Grenzwerte:

$$F_1 = \frac{4/15\,(1 - \beta/7)}{1 - 2/3\,\beta + \beta^2/5}, \qquad F_2 = F_4 = 1, \qquad F_3 = 2.$$

In Abb. 6a, b, c, d sind die vier Kurvenscharen in Abhängigkeit von λ und β aufgetragen. $\beta = 0{,}5$ stellt eine grobe Näherung für die Ellipse dar. Es ist daher in Abb. 6a eine bessere Näherung dargestellt, bei der die Ellipse durch ein Polynom sechsten Grades angenähert wird. Ferner sind noch die in der Einleitung erwähnten Messungen eingetragen, die in der Nähe dieser Grenzkurve liegen. Die gleichsfalls eingetragenen Kurven nach *E. Reißner* liegen dagegen etwa um den Faktor 2 höher. In Abb. 6c sind ebenfalls die Werte nach *Reissner* eingetragen. Allgemein lassen die Kurven erkennen, daß bei Wahl einer mehr spitzbogenförmigen Querschnittsform die Federbewegung bei sonst gleichen Abmessungsverhältnissen bedeutend vergrößert werden kann. Andrerseits sinkt aber auch die Steifigkeit der Feder und wächst die Beanspruchung, so daß der Gewinn im ganzen doch zweifelhaft ist.

c) Als drittes Beispiel sollen Federformen untersucht werden, die nach außen wulstartig verbreitert sind (Abb. 7) und durch ein Polynom vierten Grades dargestellt werden sollen. Wählt man

$$a_0 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}, \qquad a_2 = \frac{4\beta(\beta-1)}{(1+\beta)^2}, \qquad a_4 = -\frac{4\beta^2}{(1+\beta)^2}, \qquad a_6 = 0,$$

so ist die Federform gegeben durch

$$\frac{f(\xi)}{f(0)} = (1-\xi^2)(1+\beta\xi^2) \qquad (\beta \geq 1)$$

mit einem Größtwert $(1+\beta)^2/4\beta$. Vergleichsweise ist auch die schon früher behandelte Kurve mit Grenzwert dem $\beta = 0$ (vgl. Beispiel b) eingetragen. Die Rechnung liefert bei $n = m\pi$ (m ganze Zahl)

$$F_1(n) = \frac{2 + \frac{\beta}{5} - \frac{18\beta}{n^5}\,\mathfrak{Tg}\,n - \frac{1+\beta}{n^2}}{2(1+\beta)^2 n\,\mathfrak{Ctg}\,n + \frac{36\beta^2}{n^5}\,\mathfrak{Tg}\,n - \frac{36\beta^2}{n^4} - N_1}\,\frac{(1+\beta)^2}{4\beta}$$

mit

$$N_1 = 4\beta\left(1 + \frac{\beta}{5}\right) + (1+\beta)(1+5\beta) - \frac{12\beta(1+\beta)}{n^2}.$$

Ferner ist

$$F_1(0) = \frac{3\left(1 + \frac{\beta}{9}\right)}{7 + 2\beta + \frac{\beta^2}{3}}\,\frac{(1+\beta)^2}{4\beta}.$$

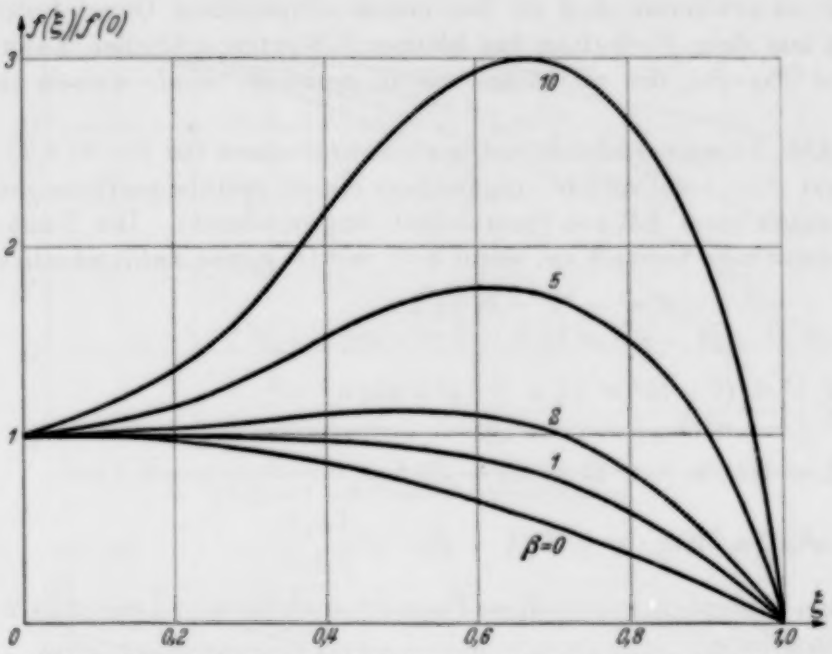

Abb. 7. Querschnittsformen, die Polynomen vierten Grades entsprechen. [$f(\xi)/f(0) = (1-\xi^2)(1+\beta\,\xi^2)$ nach Rechenbeispiel c].

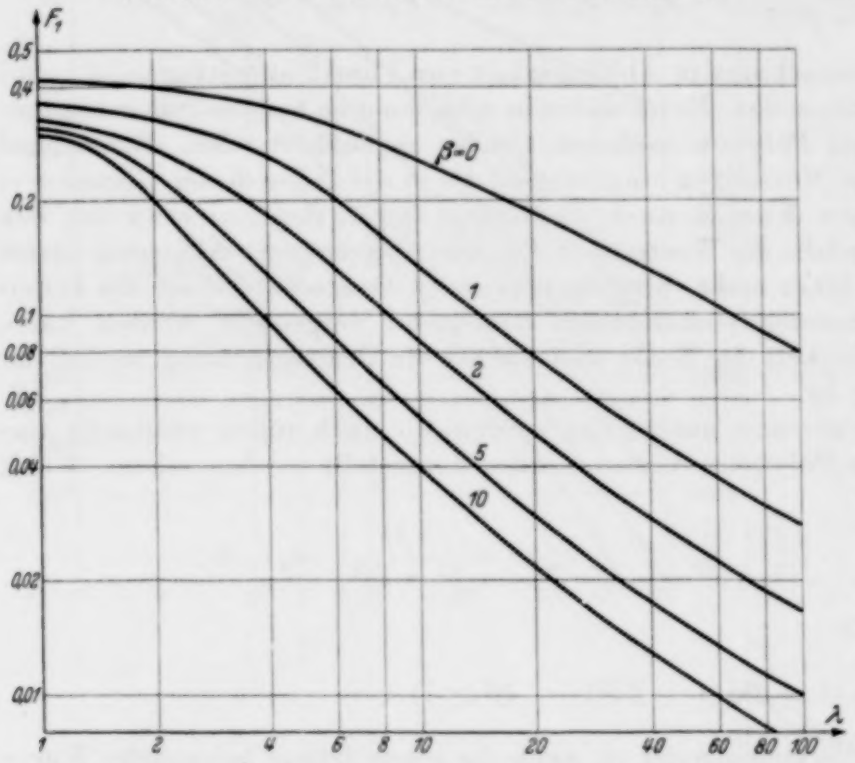

Abb. 8. Hilfsfunktion F_1 zur Berechnung der Druckempfindlichkeit von Röhrenfedern mit Querschnittsformen entsprechend Abb. 7.

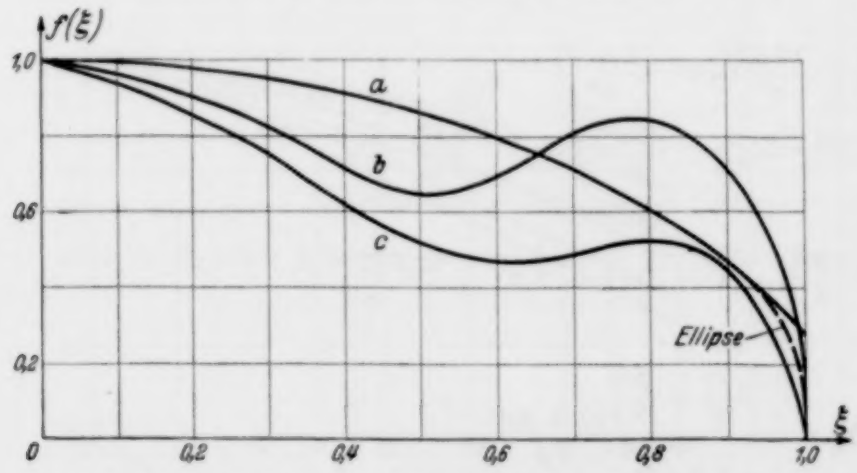

Abb. 9. Querschnittsformen, die Polynomen sechsten Grades entsprechen (Rechenbeispiel d).

Die sich hieraus ergebenden Werte für F_1 sind in Abb. 8 in Abhängigkeit von

$$\lambda = n^2/\sqrt{3\,(1-\mu^2)}$$

aufgetragen. Bei Vergrößerung des Wulstes nimmt die Druckempfindlichkeit der Röhrenfeder ab. Bei Querschnittsformen mit schwachem Wulst ist die Druckempfindlichkeit größer als bei einer Ellipse mit sonst gleichen Abmessungen.

d) Als viertes Beispiel sollen noch die in Abb. 9 dargestellten Querschnittsformen behandelt werden, die als Polynome sechsten Grades ausgedrückt werden können. Die Kurve *a* stellt eine möglichst gute Annäherung an eine Ellipse dar und entspricht folgender Funktion:

$$f(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^6}{10}\,.$$

Die ersten drei Glieder entsprechen der Reihenentwicklung einer Ellipse, das vierte Glied ist etwas vergrößert. Die Kurven *b* und *c* entsprechen folgenden Polynomen:

$$f(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{0{,}145}\,(0{,}48 - 1{,}335\,\xi^2 + \xi^4)$$

bzw.

$$f(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{0{,}1912}\,(0{,}6912 - 1{,}5\,\xi^2 + \xi^4)\,.$$

Die Funktion F_1 ist für diese drei Federformen in Abb. 10 aufgetragen. Form *c*) hat eine gute Druckempfindlichkeit, die über derjenigen der Ellipse liegt.

6. Zusammenfassung. Die für die Beurteilung einer Röhrenfeder (Bourdonmanometer) wichtigen Kenngrößen (Druckempfindlichkeit, Steifigkeit, größte Biegespannung und Überdrucksicherheit) lassen sich auf vier Funktionen zurückführen, die außer von der Querschnittsform nur noch vom Achsenverhältnis und vom Parameter

$$\lambda = a^2/s\,r$$

(*a* große Halbachse, *s* Wandstärke, *r* Krümmungsradius) abhängen. Allgemeine Berechnungen sind bisher nur für den „Flachbogen“

durchgeführt worden und hier im Ergebnis mitgeteilt. Im Grenzfall kleiner Werte von λ und beliebiger α ist für beliebige Querschnittsformen eine graphische oder numerische Lösung möglich. Ebenso tritt eine wesentliche Vereinfachung für kleine α und beliebige λ ein. Dieser Grenzfall wird hier im wesentlichen behandelt und zwar für Querschnittsformen, die sich

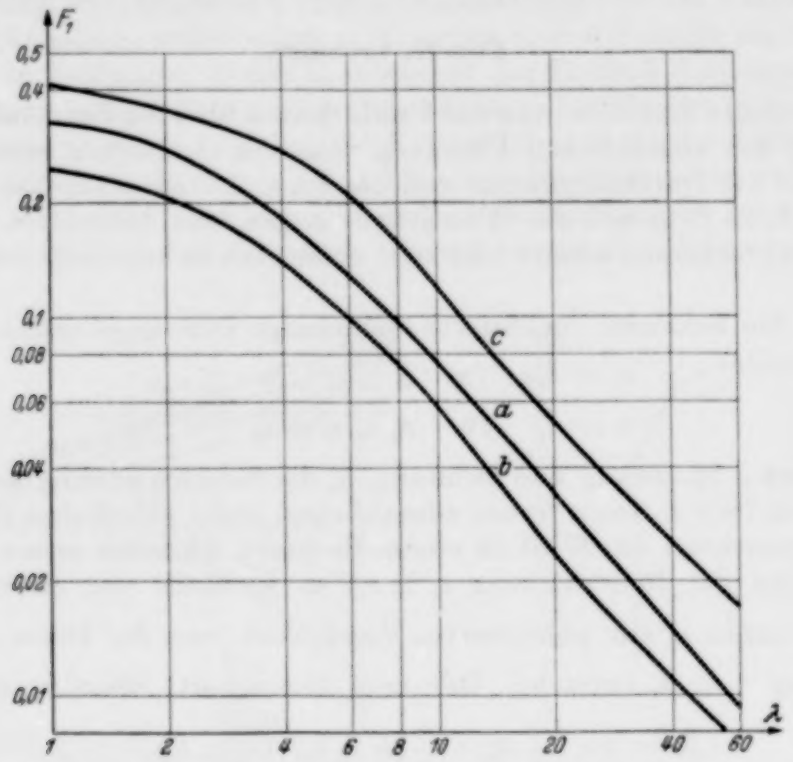

Abb. 10. Hilfsfunktion F_1 zur Berechnung der Druckempfindlichkeit von Röhrenfedern mit Querschnittsformen entsprechend Abb. 9.

als Polynom sechsten Grades darstellen lassen. Die für eine Näherungsellipse durchgeführte Rechnung zeigt befriedigende Übereinstimmung mit Meßergebnissen, während die *Reissner*sche Theorie der elliptischen Röhrenfeder erheblich davon abweicht. Im Ganzen zeigen die durchgeführten Rechnungen einen erheblichen Einfluß der Querschnittsform.

(Eingegangen am 28. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Wuest*, Göttingen, Böttingerstr. 6/8.

Die Formänderungen idealplastischer statisch bestimmter Balken.

Von H. Craemer.

In der Plastizitätslehre bestehen teilweise Unklarheiten über die Formänderungen von Balken, besonders betreffend den allmählichen Übergang vom rein elastischen zum rein plastischen Zustand und die Größe der Durchbiegungen und die Form der Biegelinie im vollplastischen Endzustand. Als Beispiel, an dem sich das Wesentliche zeigen läßt, behandeln wir einen Balken auf zwei Stützen mit Rechtecksquerschnitt und zwei symmetrisch angeordneten, gleich großen Einzellasten.

Wir legen dabei die bekannte idealisierte Spannungs-Dehnungsfunktion

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \quad \text{für} \quad \sigma \leq \sigma_s\,, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_s\,, \\ \sigma &= \sigma_s \quad \text{für} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon < \infty \end{aligned}\right| \tag{1}$$

zugrunde, in der σ und ε Spannung und Dehnung, σ_s die Streckspannung und ε_s die Dehnung bei Streckbeginn bedeuten; wir nehmen ferner allmähliches, nicht plötzliches Eindringen des Fließvorganges in den Querschnitt an. Wird in einem Rechteck bh unter reiner Biegung die Randspannung $\sigma_r = \sigma_s$, also die Randdehnung $\varepsilon_r \geq \varepsilon_s$, so verbleibt ein elastischer Kern $h_e \leq h_s$, während oben und unten je ein plastiziertes Randgebiet von der Dicke $\frac{1}{2}(h - h_e)$ und der konstanten Spannung $\sigma = \sigma_s$ entsteht. Das vom Querschnitt übertragene Moment ist dann

$$M = b\sigma_s\left[\frac{1}{6}h_e^2 + \frac{1}{4}(h - h_e)\;(h + h_e)\right].$$

Da ferner

$$\frac{h_e}{h} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_r} \tag{2}$$

ist, erhält man hieraus

$$M = \frac{1}{12}\sigma_s\, bh^2\left(3 - \frac{\varepsilon_s^2}{\varepsilon_r^2}\right),$$

insbesondere bei voller Plastizierung mit $\varepsilon_r = \infty$, $M_s = \sigma_s\, b\frac{h^2}{4}$.

Definiert man als Ausnutzung des Querschnitts die Größe $\nu = M/M_s$, so wird

$$\nu = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_r}\right)^2; \tag{3}$$

bei Fließbeginn ist die Ausnutzung $\nu = \frac{2}{3}$, am Schluß $\nu = 1$.

In Abb. 1 ist nun, stark umrandet, ein Teil des Balkens dargestellt. Ist ν_0 die Ausnutzung des Querschnitts unter der Last, so ist sie für einen beliebigen Querschnitt ν_x, entsprechend dem Verlauf der Momentenlinie; dies ist für verschiedene Laststufen $\frac{2}{3} \leq \nu_0 \leq 1$ oben links bei *a* eingetragen. Die für jeden Querschnitt und jede Laststufe nach (3) hierzu errechneten Größen $\varepsilon_r/\varepsilon_s$ sind bei *b* zu sehen. Ferner sind nach (2) die Höhen der elastischen Kerne ermittelt und bei *c* eingetragen; man sieht, wie der Fließvorgang sich einerseits nach der Tiefe, andererseits in der Längsrichtung ausbreitet.

Die gegenseitige Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte ist nun (siehe *d*)

$$d\varphi = 2\,\frac{\varepsilon_r\, dx}{h};$$

die Biegelinie ist dann bekanntlich die Momentenlinie des Balkens bei Belastung mit diesen sog. Winkelgewichten. Wir belasten nun statt dessen mit

$$\frac{h}{2\,l\,\varepsilon_s}\,d\varphi = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_s}\,d\xi\,,$$

(siehe die schraffierten Differentiale in b), wobei $dx = l\,d\xi$ gesetzt wurde, und erhalten dadurch

die $h/2\ l\varepsilon_s$-fachen Winkeländerungen und $h/2\ l^2\varepsilon_s$-fachen Durchbiegungen an beliebiger Stelle. Die so gewonnenen dimensionslosen Werte sind unabhängig von den Abmessungen (h, l) und Baustoffeigenschaften (ε_s) des Balkens und stellen den Vorgang als alleinige Funktion des Dehnungsgrades $\varepsilon_r/\varepsilon_s$ oder, wegen (3), der Ausnutzung dar.

Bei dieser Auswertung, die rechnerisch vorgenommen wurde, ist das Verhältnis Lastabstand: Spannweite mit $\alpha = 0{,}01$ angenommen worden. Bis etwa $\nu_0 = 0{,}9$ erhält man praktisch dasselbe wie für eine Einzellast in Feldmitte. Dann aber wächst der Einfluß derjenigen Winkelgewichte, die zwischen den Lasten infolge der dort herrschenden großen Randdehnungen entstehen, vgl. Skizze *b*. Bei voller Ausnutzung, $\nu_0 = 1$, hat die Fläche der ε_r zwischen Auflager und Last zwar eine unendlich große Ordinate, aber, wie ich früher auseinandergesetzt habe, einen endlichen Flächeninhalt. Mit $\alpha = 0$ würde man also eine endliche Durchbiegung erhalten, und zwar eine solche, die weit geringer ist als sie bei Versuchen beobachtet wurde. Zieht man dagegen eine noch

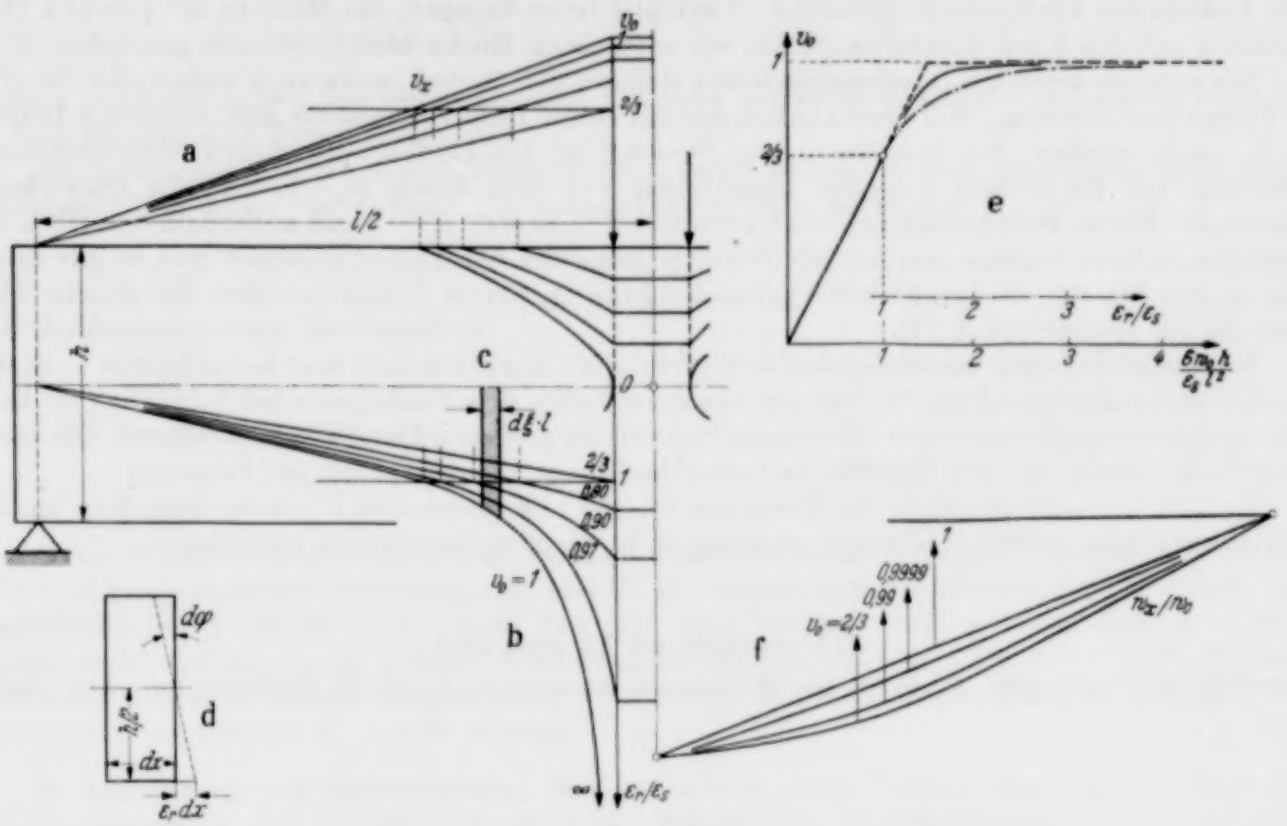

Abb. 1.

so geringe, wenn auch endliche Spreizung der beiden Lasten oder, was im Ergebnis auf das Gleiche hinauskommt, eine Verteilung über eine geringe Länge in Betracht, so wird unter $\nu_0 = 1$ das Winkelgewicht zwischen den Lasten und infolgedessen auch die Durchbiegung unendlich groß.

Freilich ist unter so großen Verformungen die Beanspruchung des Balkens nicht mehr so wie sie hier zugrunde gelegt wurde und auch der Zusammenhang zwischen Winkeländerung und Durchbiegung ist anders, d. h. man müßte eigentlich die Untersuchung durch Entwicklung einer Theorie zweiter Ordnung verbessern; doch würde dies am Grundsätzlichen wohl nicht viel ändern.

In Skizze *e* ist nun die Durchbiegung w_0 in Feldmitte als Vielfaches von $\varepsilon_s l^2/6\ h$ in Abhängigkeit von der Ausnutzung ν_0 aufgetragen. Bis zum Fließbeginn, $\nu_0 = 2/3$, ist die Beziehung linear. Darüber hinaus wächst die Durchbiegung schneller als die Ausnutzung; z. B. erhält man für $\nu_0 = 0{,}99$ einen Beiwert von 2,03 in der Figur, während man bei Fortdauer der linearen Beziehung nur 1,48 erhalten hätte.

Ferner sind in der Skizze die zu jeder Ausnutzungsstufe gehörigen Dehnungsgrade $\varepsilon_{r0}/\varepsilon_s$ für den Querschnitt unter der Last angegeben. Die Dehnungen wachsen also schneller als die Qurchbiegungen, da letztere nicht nur von den großen Dehnungen in den meist beanspruchten Duerschnitten, sondern auch vom Verhalten der minder beanspruchten Schnitte beeinflußt werden. Bei Versuchsauswertungen sind diese beiden Linien teilweise verwechselt worden. Auch ist zu betonen, daß die Form dieser Kurven nicht eine Folge der meist vorhandenen Ausrun-

Die Formänderungen idealplastischer statisch bestimmter Balken.

Von H. Craemer.

In der Plastizitätslehre bestehen teilweise Unklarheiten über die Formänderungen von Balken, besonders betreffend den allmählichen Übergang vom rein elastischen zum rein plastischen Zustand und die Größe der Durchbiegungen und die Form der Biegelinie im vollplastischen Endzustand. Als Beispiel, an dem sich das Wesentliche zeigen läßt, behandeln wir einen Balken auf zwei Stützen mit Rechtecksquerschnitt und zwei symmetrisch angeordneten, gleich großen Einzellasten.

Wir legen dabei die bekannte idealisierte Spannungs-Dehnungsfunktion

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \quad \text{für} \quad \sigma \leq \sigma_s\,, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_s\,, \\ \sigma &= \sigma_s \quad \text{für} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon < \infty \end{aligned}\right| \tag{1}$$

zugrunde, in der σ und ε Spannung und Dehnung, σ_s die Streckspannung und ε_s die Dehnung bei Streckbeginn bedeuten; wir nehmen ferner allmähliches, nicht plötzliches Eindringen des Fließvorganges in den Querschnitt an. Wird in einem Rechteck bh unter reiner Biegung die Randspannung $\sigma_r = \sigma_s$, also die Randdehnung $\varepsilon_r \geq \varepsilon_s$, so verbleibt ein elastischer Kern $h_e \leq h$, während oben und unten je ein plastiziertes Randgebiet von der Dicke $\frac{1}{2}(h - h_e)$ und der konstanten Spannung $\sigma = \sigma_s$ entsteht. Das vom Querschnitt übertragene Moment ist dann

$$M = b\sigma_s\left[\frac{1}{6}h_e^2 + \frac{1}{4}(h - h_e)\;(h + h_e)\right].$$

Da ferner

$$\frac{h_e}{h} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_r} \tag{2}$$

ist, erhält man hieraus

$$M = \frac{1}{12}\sigma_s\, bh^2\left(3 - \frac{\varepsilon_s^2}{\varepsilon_r^2}\right),$$

insbesondere bei voller Plastizierung mit $\varepsilon_r = \infty$, $M_s = \sigma_s\, b\frac{h^2}{4}$.

Definiert man als Ausnutzung des Querschnitts die Größe $\nu = M/M_s$, so wird

$$\nu = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_r}\right)^2; \tag{3}$$

bei Fließbeginn ist die Ausnutzung $\nu = \frac{2}{3}$, am Schluß $\nu = 1$.

In Abb. 1 ist nun, stark umrandet, ein Teil des Balkens dargestellt. Ist ν_0 die Ausnutzung des Querschnitts unter der Last, so ist sie für einen beliebigen Querschnitt ν_x, entsprechend dem Verlauf der Momentenlinie; dies ist für verschiedene Laststufen $\frac{2}{3} \leq \nu_0 \leq 1$ oben links bei a eingetragen. Die für jeden Querschnitt und jede Laststufe nach (3) hierzu errechneten Größen $\varepsilon_r/\varepsilon_s$ sind bei b zu sehen. Ferner sind nach (2) die Höhen der elastischen Kerne ermittelt und bei c eingetragen; man sieht, wie der Fließvorgang sich einerseits nach der Tiefe, andererseits in der Längsrichtung ausbreitet.

Die gegenseitige Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte ist nun (siehe d)

$$d\varphi = 2\,\frac{\varepsilon_r\, dx}{h};$$

die Biegelinie ist dann bekanntlich die Momentenlinie des Balkens bei Belastung mit diesen sog. Winkelgewichten. Wir belasten nun statt dessen mit

$$\frac{h}{2\,l\,\varepsilon_s}\,d\varphi = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_s}\,d\xi\,,$$

(siehe die schraffierten Differentiale in b), wobei $dx = l\,d\xi$ gesetzt wurde, und erhalten dadurch

die $h/2\ l\varepsilon_s$-fachen Winkeländerungen und $h/2\ l^2\varepsilon_s$-fachen Durchbiegungen an beliebiger Stelle. Die so gewonnenen dimensionslosen Werte sind unabhängig von den Abmessungen (h, l) und Baustoffeigenschaften (ε_s) des Balkens und stellen den Vorgang als alleinige Funktion des Dehnungsgrades $\varepsilon_r/\varepsilon_s$ oder, wegen (3), der Ausnutzung dar.

Bei dieser Auswertung, die rechnerisch vorgenommen wurde, ist das Verhältnis Lastabstand: Spannweite mit $\alpha = 0{,}01$ angenommen worden. Bis etwa $\nu_0 = 0{,}9$ erhält man praktisch dasselbe wie für eine Einzellast in Feldmitte. Dann aber wächst der Einfluß derjenigen Winkelgewichte, die zwischen den Lasten infolge der dort herrschenden großen Randdehnungen entstehen, vgl. Skizze *b*. Bei voller Ausnutzung, $\nu_0 = 1$, hat die Fläche der ε_r zwischen Auflager und Last zwar eine unendlich große Ordinate, aber, wie ich früher auseinandergesetzt habe, einen endlichen Flächeninhalt. Mit $\alpha = 0$ würde man also eine endliche Durchbiegung erhalten, und zwar eine solche, die weit geringer ist als sie bei Versuchen beobachtet wurde. Zieht man dagegen eine noch

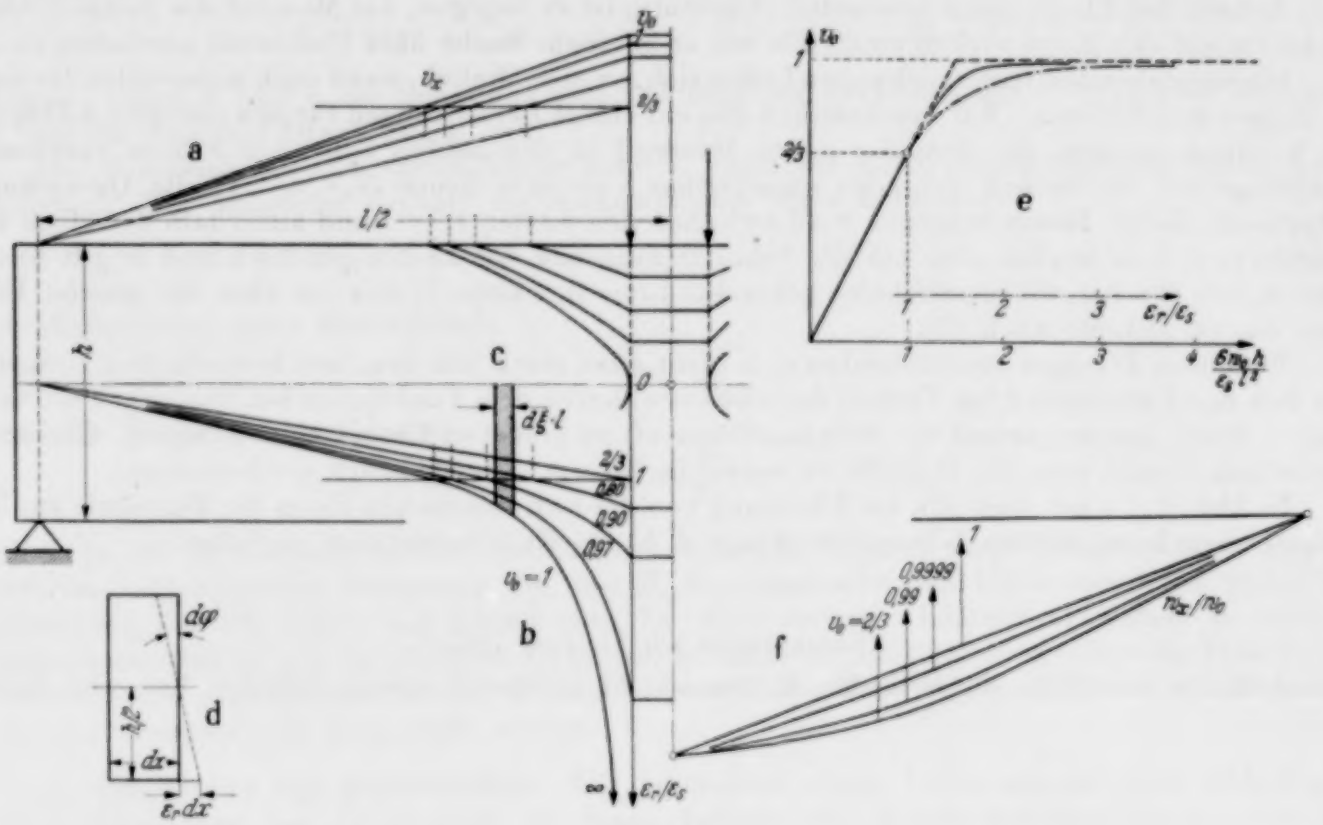

Abb. 1.

so geringe, wenn auch endliche Spreizung der beiden Lasten oder, was im Ergebnis auf das Gleiche hinauskommt, eine Verteilung über eine geringe Länge in Betracht, so wird unter $\nu_0 = 1$ das Winkelgewicht zwischen den Lasten und infolgedessen auch die Durchbiegung unendlich groß.

Freilich ist unter so großen Verformungen die Beanspruchung des Balkens nicht mehr so wie sie hier zugrunde gelegt wurde und auch der Zusammenhang zwischen Winkeländerung und Durchbiegung ist anders, d. h. man müßte eigentlich die Untersuchung durch Entwicklung einer Theorie zweiter Ordnung verbessern; doch würde dies am Grundsätzlichen wohl nicht viel ändern.

In Skizze *e* ist nun die Durchbiegung w_0 in Feldmitte als Vielfaches von $\varepsilon_s\, l^2/6\, h$ in Abhängigkeit von der Ausnutzung ν_0 aufgetragen. Bis zum Fließbeginn, $\nu_0 = 2/3$, ist die Beziehung linear. Darüber hinaus wächst die Durchbiegung schneller als die Ausnutzung; z. B. erhält man für $\nu_0 = 0{,}99$ einen Beiwert von 2,03 in der Figur, während man bei Fortdauer der linearen Beziehung nur 1,48 erhalten hätte.

Ferner sind in der Skizze die zu jeder Ausnutzungsstufe gehörigen Dehnungsgrade $\varepsilon_{r0}/\varepsilon_s$ für den Querschnitt unter der Last angegeben. Die Dehnungen wachsen also schneller als die Qurchbiegungen, da letztere nicht nur von den großen Dehnungen in den meist beanspruchten Duerschnitten, sondern auch vom Verhalten der minder beanspruchten Schnitte beeinflußt werden. Bei Versuchsauswertungen sind diese beiden Linien teilweise verwechselt worden. Auch ist zu betonen, daß die Form dieser Kurven nicht eine Folge der meist vorhandenen Ausrun-

dung der (σ, ε)-Linie in der Gegend von $\varepsilon = \varepsilon_s$ sind, die hier nach (1) ausdrücklich vernachlässigt wurde.

Die Form der Biegelinien wird am besten durch die Verhältnisse w_x/w_0 (w_x an beliebiger Stelle, w_0 unter der Last) gekennzeichnet (siehe Abb. 1, *f*). Man sieht, wie die Krümmung in dem elastisch beanspruchten Balkenteil immer mehr hinter der in den plastizierten Teilen zurückbleibt. Am Schluß, unter $\nu_0 = 1$ und $h_e = 0$, ist die Verformung in den Bereichen außerhalb der Lasten, wo $\nu_x < 1$, unendlich klein gegenüber derjenigen zwischen diesen, wo $\nu_x = \nu_0 = 1$. Stehen die beiden Lasten so nahe beieinander, daß sie als eine einzige betrachtet werden können, so bilden im Endzustand die gerade Linie der Skizze *f* und die entsprechende auf der linken Balkenhälfte einen Knick, d. h. das bekannte Fließgelenk[1]. Im allgemeinen Falle bildet sich zwischen den Lasten eine Gelenkkette.

Man kann die vorstehenden Untersuchungen auch so durchführen, daß man als wirksam nur den elastischen Kern und den auf ihn entfallenden Teilbetrag des Moments ansieht und hierauf die Lehren der Elastostatik anwendet. Unrichtig ist es dagegen, das Moment des ganzen Querschnitts auf den Kern wirken zu lassen, wie es in einem Buche über Plastizität geschehen ist.

Die vorstehenden Untersuchungen ließen sich, an sich ähnlich, wenn auch mühevoller, für einen I-Träger durchführen. Wir beschränken uns auf einige Bemerkungen für den „idealen I-Träger", d. h. einen solchen, bei dem der ganze Baustoff in den beiden äußersten Fasern zusammengedrängt ist. Es bleiben dann bis unmittelbar vor dem Bruch ($\nu_x < \nu_0 < 1$) alle Querschnitte elastisch. Beim Bruch hingegen wird zwischen den Lasten $\nu_0 = 1$ und außerhalb derselben weiterhin $\nu_x < 1$, es werden also nur die Schnitte zwischen den Lasten plastisch und es gilt sowohl für w_0 wie für $\varepsilon_r/\varepsilon_s$ die gestrichelte geknickte Linie in Skizze *f*; dies ist aber die gleiche Form wie die (σ, ε)-Linie nach (1).

Wirkliche I-Träger unterscheiden sich nicht allzu stark von dem hier betrachteten Grenzfall, so daß der Unterschied im Verlauf der eben erwähnten drei Funktionen bei Versuchen oft kaum zur Geltung kommt, zumal die Nebeneinflüsse oft zu größeren Unterschieden führen. Dies sollte aber kein Grund sein, die Begriffe zu verwechseln, wie es gelegentlich geschehen ist.

In Abb. 1, *f* wird ebenfalls der Übergang von der rein elastischen Form der Biegelinie zur rein plastischen beim idealen I-Träger unstetig, d. h. die Zwischenformen entfallen.

(Eingegangen am 11. Juni 1951.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *H. Craemer*, Alexandria (Ägypten), Bulkeley, Immeuble Binoor.

[1] Vgl. hierzu auch die Betrachtungen in einer früheren Arbeit: *H. Craemer*, Ing.-Arch. 13 (1943), S. 285.

Ausnutzungslinien als Darstellungsmittel in der Plastostatik.

Von H. Craemer.

1. Grundlagen und Aufgabe. Während in der Elastostatik alle von einer Last hervorgerufenen Wirkungen — Spannungen, Stabkräfte und -momente usw. — dieser zufolge der *Hooke*schen Annahme unmittelbar verhältnisgleich sind, trifft dies in der Plastostatik nicht zu; statt dessen haben wir es hier mit Kurven zu tun, die entweder krummlinig sind oder aus mehreren geraden Stücken bestehen. Im Folgenden beschränken wir uns auf Stabwerke unter Biegung, die der bekannten Annahme idealer Plastizität

$$\sigma = E\,\varepsilon \quad \text{für} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_s,\ \sigma \leq \sigma_s, \qquad \sigma = \sigma_s, \quad \text{für} \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \infty \tag{1}$$

folgen, wobei σ_s und ε_s die Spannung und Dehnung bei Erreichen der Streckgrenze bedeuten; σ_s soll für Zug und Druck gleich sein.

Die Gesetzmäßigkeiten treten klarer hervor, wenn wir sie in dimensionslosen Größen ausdrücken. Wir definieren deshalb als Ausnutzung eines Elements

$$\mu \equiv \frac{\sigma}{\sigma_s}, \tag{2}$$

als Ausnutzung eines Querschnitts

$$\nu \equiv \frac{M}{M_s} \tag{3}$$

und des Tragwerks als Ganzem:

$$\omega \equiv \frac{P}{P_s}; \tag{3}$$

hierin ist M das in einem bestimmten Zustand wirkende Moment eines Querschnitts, P die vom System aufgenommene Belastung, M_s und P_s die entsprechenden Höchstwerte bei voller Heranziehung der Plastizität auf Grund von (1). Sind mehrere Lasten vorhanden, so wird angenommen, daß sie alle im gleichen Verhältnis zunehmen. Im folgenden sollen die Beziehungen zwischen den oben definierten drei Größen für einige charakteristische Fälle untersucht und als Ausnutzungslinien dargestellt werden.

2. Ausnutzung von Querschnitten. Wir betrachten einen I-Querschnitt nach Abb. 1 unter Vernachlässigung der Spannungen im Steg. Solange die Randdehnungen $\varepsilon_r \leq \varepsilon_s$ sind, d.h. im *Hooke*schen Bereich (Abb. 1a) ist

$$M = \frac{1-\alpha^3}{6\,\xi}\,\sigma\,b\,h^2, \tag{5}$$

nach Einsetzen der Plastizierung (Abb. 1b)[1]

$$M = \left(3 - \beta^2 - 2\,\frac{\alpha^3}{\beta}\right)\frac{\sigma_s b h^2}{12}.$$

Für die Elemente des elastischen Kerns ist nun $\sigma/\sigma_s = \xi/\beta$, also

$$M = \left(3 - \frac{\xi^2\sigma_s^2}{\sigma^2} - 2\,\frac{\alpha^3\sigma}{\xi\,\sigma_s}\right)\sigma_s\,\frac{bh^2}{12}, \tag{6}$$

und hieraus folgt im Falle $\sigma = \sigma_s$, $\xi = \alpha$, d.h. bei voller Plastizierung

$$M_s = (1-\alpha^2)\,\sigma_s\,\frac{bh^2}{4}. \tag{7}$$

Dividiert man nun (5) und (6) je durch (7) und zieht die Begriffe nach (2) und (3) heran, so folgt im elastischen Zustand

$$\nu = \frac{3}{2}\,\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^2}\,\mu, \tag{8}$$

[1] *H. Craemer*, Ingenieur-Arch. 13 (1943), S. 285.

bei teilweiser Plastizierung jedoch im elastischen Kern

$$\nu = \frac{3 - \xi^2/\mu^2 - 2\,\alpha^3\,\mu/\xi}{3\,(1-\alpha^2)} \tag{9a}$$

sowie

$$\mu = 1 \tag{9b}$$

in den Fließgebieten.

Mit $\xi = 1$, $\mu = 1$ erhält man aus (8) und (9) den gleichen Wert, nämlich

$$\nu_s = \frac{2}{3}\,\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^2}\,; \tag{10}$$

dies ist diejenige Ausnutzung des Tragwerks, bei der gerade an einer Stelle die Streckgrenze erreicht wird; der Kehrwert $1/\nu_s$ wird teilweise als Biegefaktor bezeichnet und gibt an, um wieviel das Biegemoment nach dem ersten Fließen noch gesteigert werden kann.

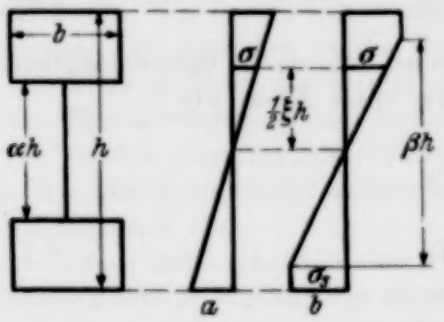

Abb. 1. Spannungen im I-Querschnitt.

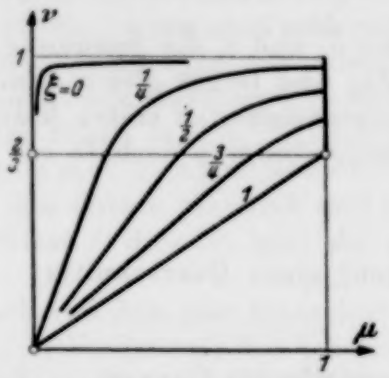

Abb. 2. Ausnutzung der Elemente.

Für eine bestimmte Querschnittsform, gekennzeichnet durch den Wert α, und ein bestimmtes Element, bezeichnet durch ξ, kann man aus Vorstehendem die Beziehungen zwischen μ und ν darstellen. Für $\alpha = 0$, also das volle Rechteck, wird im elastischen Zustand

$$\nu = \frac{2}{3}\,\frac{\mu}{\xi} \tag{11}$$

und für den elastischen Kern nach Fließbeginn

$$\nu = 1 - \frac{\xi^2}{3\,\mu^2}\,, \tag{12}$$

ferner ist

$$\nu_s = \frac{2}{3}\,. \tag{13}$$

Abb. 2 gibt den Verlauf der Funktionen (11) und (12) an; man erkennt das raschere Ansteigen der Ausnutzung der Elemente, nachdem der Rand begonnen hat zu fließen.

Der andere Grenzfall, $\alpha = 1$, betrifft den „idealen I-Träger", bei dem die ganze Masse in der äußersten Faser zusammengedrängt ist; er ist nicht weit entfernt von wirklichen I-Trägern, bei denen α meist etwa 0,9 beträgt. Es kommen hier nur die Elemente $\xi = 1$ in Frage; Gleichung (8) liefert hierzu zunächst einen unbestimmten Ausdruck, der nach den üblichen Regeln zu

$$\mu = \nu \tag{14}$$

bestimmt werden kann. In ähnlicher Weise findet man aus (10)

$$\nu_s = 1\,. \tag{15}$$

Man sieht, daß mit voller Ausnutzung der Randelemente hier auch die volle Ausnutzung des Querschnitts selbst gegeben ist, so daß (9) gegenstandslos wird. Es sollte mehr beachtet werden, daß dies nur für den idealen I-Träger gilt. Die Ausnutzungslinie ist hier eine gerade Linie (Abb. 3), d.h. alle Linien der Abb. 2 sind in eine einzige zusammengedrängt. Es sei bemerkt, daß dieser Querschnitt statisch bestimmt ist, da es nur eine einzige Spannungsverteilung gibt, die den Gleichgewichtsbedingungen genügt.

Für das gleichschenklige Dreieck mit um eine waagrechte Achse drehendem Moment beschränken wir uns auf einige wichtige Zustände. Im elastischen Zustand (Abb. 4a) ist die obere und untere Randspannung

$$\sigma_0 = -\frac{24\,M}{bh^2}, \qquad \sigma_u = \frac{12\,M}{bh^2}, \tag{16a,b}$$

in der Schwerlinie ist

$$\sigma_a = 0 \tag{16c}$$

und in den Abständen $y_b = 0{,}375\ h$ und $y_c = 0{,}293\ h$ von der Grundlinie

$$\sigma_b = -\frac{3}{2}\frac{M}{bh^2}, \qquad \sigma_c = 1{,}44\,\frac{M}{bh^2}. \tag{16d,e}$$

Das Fließen setzt zunächst am oberen Rande ein und breitet sich von da nach unten aus; wenn im unteren Rande die Fließspannung gerade erreicht ist, gilt Abb. 4b. Aus der Gleichheit der Zug- und Druckkraft findet man den Abstand der Nullinie zu $y_b = 3\,h/8$ sowie aus dem

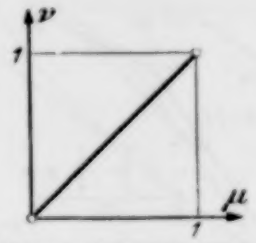

Abb. 3. Ausnutzung des idealen I-Trägers.

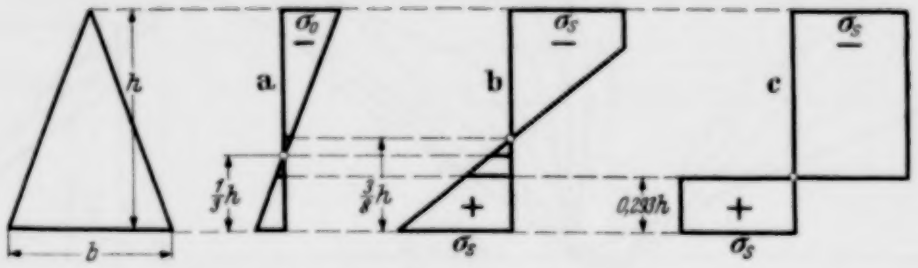

Abb. 4. Spannungsstufen im Dreiecksquerschnitt.

Gleichgewicht gegen Drehen das wirkende Moment

$$M = \frac{7}{96}\,\sigma_s\,bh^2; \tag{17}$$

die Spannungen sind

$$-\sigma_0 = \sigma_u = \sigma_s, \qquad \sigma_a = \frac{1}{9}\,\sigma_s, \qquad \sigma_b = 0, \qquad \sigma_c = 0{,}22\,\sigma_s. \tag{18}$$

Bei voller Plastizierung schließlich (Abb. 4c) erhält man auf gleiche Weise $y_c = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)h = 0{,}293h$; die im Schrifttum anzutreffende Angabe, daß hier die Nullinie durch den Schwerpunkt geht, ist voreilig, vielmehr ist sie bei vollplastischer reiner Biegung für jeden Querschnitt die Flächenhalbierende. Das Moment in diesem Zustand ist

$$M_s = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_s\,bh^2 = 0{,}0977\,\sigma_s\,bh^2. \tag{19}$$

Drückt man wieder die Momente und Spannungen nach (2) und (3) aus, so wird im elastischen Zustand *a*

$$\mu_0 = -2{,}34\,\nu, \qquad \mu_u = 1{,}17\,\nu, \qquad \mu_a = 0, \qquad \mu_b = -0{,}15\,\nu, \qquad \mu_c = 0{,}14\,\nu, \tag{20}$$

weiter im Zustand *b*

$$\nu = 0{,}75, \qquad -\mu_0 = \mu_u = 1, \qquad \mu_a = 0{,}11, \qquad \mu_b = 0, \qquad \mu_c = 0{,}22 \tag{21}$$

und bei voller Plastizierung

$$-\mu_0 = \mu_u = -\mu_a = \mu_b = 1, \qquad \mu_c = \pm 1, \qquad \nu = 1; \tag{22}$$

ferner ist

$$\nu_s = \frac{1}{2{,}34} = 0{,}428. \tag{23}$$

Die vorstehenden Angaben sind in Abb. 5 dargestellt und, da die Zwischenzustände nicht behandelt wurden, so gut es ging, ergänzt. Die für das Element *c* schematisch angedeutete Verzweigung ergibt sich, je nachdem man einen Punkt unmittelbar unter oder über *c* betrachtet.

3. Ausnutzung von Tragwerken. Wir untersuchen einen voll eingespannten Balken mit konstantem Querschnitt und zwei Einzellasten P in den Drittelspunkten (Abb. 6). Dann ist im elastischen Zustand

$$M_a = -\frac{2}{9} Pl\,, \qquad M_m = \frac{1}{9} Pl\,, \qquad M_x = P\left(x - \frac{2}{9} l\right). \tag{24}$$

Der Stützenquerschnitt beginnt als erster zu fließen. Wir legen im Folgenden ideale I-Träger zu Grunde, so daß M_a bei Fließbeginn sofort seine volle Ausnutzung besitzt und von da ab konstant bleibt; darnach ist

$$M_a = -M_s\,, \qquad M_m = \frac{1}{3} Pl - M_s\,, \qquad M_x = Px - M_s\,. \tag{25}$$

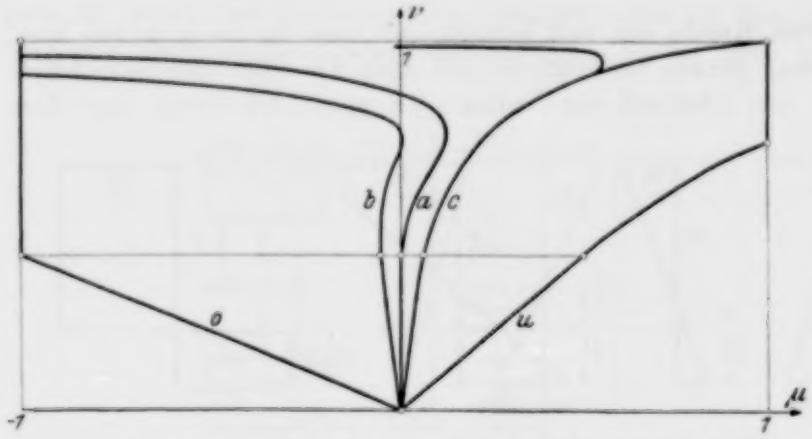

Abb. 5. Ausnutzung verschiedener Fasern im Dreieck der Abb. 4.

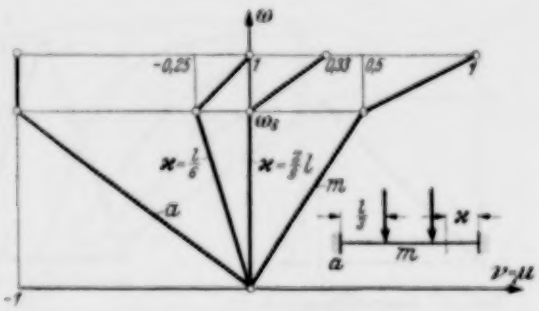

Abb. 6. Ausnutzung verschiedener Querschnitte.

Dies dauert solange, bis auch zwischen den Lasten der Fließzustand erreicht ist, das System somit voll ausgenutzt ist, d.h.

$$-M_a = M_m = M_s = \frac{1}{6} P_s l\,, \qquad M_x = P_s\left(x - \frac{l}{6}\right). \tag{26}$$

Führen wir nun die Ausnutzung nach (3) und (4) ein, so erhalten wir aus (24)

$$-\nu_a = 2\,\nu_m = \frac{4}{3}\omega\,, \qquad \nu_x = \left(6\,\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\right)\omega\,. \tag{27}$$

Wir bezeichnen nun mit ω_s die Ausnutzung des Tragwerks, unter der an irgend einer Stelle zum ersten Male Fließen eintritt und erhalten mit $\nu_a = -1$

$$\omega_s = \frac{3}{4}\,; \tag{28}$$

zu diesem Zeitpunkt ist demnach erst dreiviertel der theoretischen Tragfähigkeit ausgenutzt. Nach Bindung der Fließgelenke an den Auflagern folgt aus (25)

$$\nu_a = -1\,, \qquad \nu_m = 2\,\omega - 1\,, \qquad \nu_x = 6\,\frac{x}{l}\,\omega - 1 \tag{29}$$

und im Endzu stand

$$-\nu_a = \nu_m = \omega = 1\,, \qquad \nu_x = 6\,\frac{x}{l} - 1\,. \tag{30}$$

Abb. 6 zeigt diese Beziehungen für die Schnitte a und m sowie $x/l = 2/9$ und $x/l = 1/6$, d.h. für die Momentennullpunkte im rein elastischen und rein plastischen Zustand. Während also in einem voll ausgenutzten Querschnitt ($\nu = 1$) sämtliche Elemente mit $\mu = 1$ ebenfalls voll ausgenutzt sind, trifft das Entsprechende für das Tragwerk im allgemeinen nicht zu; vielmehr erreichen bei voller Ausnutzung des letzteren ($\omega = 1$) nur die Querschnitte am Auflager und zwischen den Lasten den Wert $\nu = 1$.

Das nächste Beispiel betrifft den gleichen Balken mit nur einer Einzellast, und zwar im linken Drittelspunkt. Im *Hooke*schen Bereich ist für die beiden Auflager a und b und den Schnitt c unter der Last

$$M_a = -0{,}1482\ Pl, \qquad M_b = -0.0741\ Pl, \qquad M_c = 0{,}0987\ Pl\,. \tag{31}$$

Nachdem der Schnitt *a* als erster fließt, wirkt der Träger als einseitig bei *b* eingespannt mit konstantem Moment bei *a* und die elastostatische Untersuchung hierfür liefert

$$M_a = -M_s, \qquad M_b = \frac{1}{2} M_s - 0{,}1482\, P l, \qquad M_c = -\frac{1}{2} M_s + 0{,}1728\, P l. \tag{32}$$

Als nächster Querschnitt fließt *c* und das System wirkt nun als Träger mit Einspannung bei *b* und Fließgelenk mit konstantem Moment bei *c*, ist also statisch bestimmt; es wird

$$-M_a = M_c = M_s, \qquad M_b = -\frac{2}{3} P l + 5\, M_s, \tag{33}$$

bis schließlich auch Querschnitt *b* plastisch wird und

$$-M_a = -M_b = M_c = M_s = \frac{1}{9} P_s l \tag{34}$$

wird.

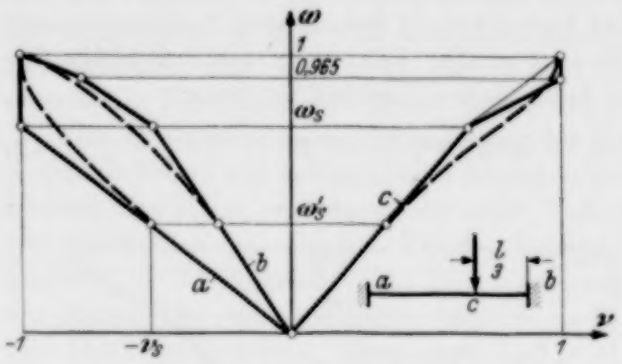

Abb. 7. Ausnutzung verschiedener Schnitte.

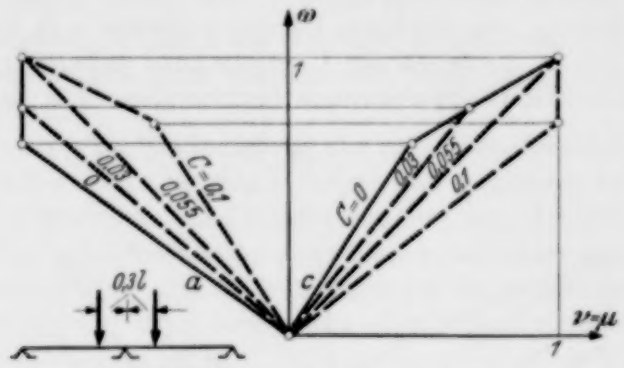

Abb. 8. Einfluß elastisch senkbarer Mittelstütze.

Die Ausnutzungslinien für die verschiedenen Bereiche haben die Gleichungen

$$\nu_a = -\frac{4}{3}\omega, \qquad \nu_b = -\frac{2}{3}\omega, \qquad \nu_c = +\frac{8}{9}\omega, \tag{35}$$

$$\nu_a = -1, \qquad \nu_b = -\frac{4}{3}\omega + \frac{1}{2}, \qquad \nu_c = 1{,}555\,\omega - \frac{1}{2}, \tag{36}$$

$$-\nu_a = \nu_c = 1, \qquad \nu_b = -6\omega + 5, \tag{37}$$

$$-\nu_a = \nu_c = -\nu_b = \omega = 1. \tag{38}$$

Die Gültigkeitsgrenzen ergeben sich durch Gleichsetzen von (35) und (36) zu

$$\omega_s = \frac{3}{4} \tag{39}$$

(erstes Fließen überhaupt, bei *a*) und aus (36) und (37) zu $\omega_c = 0{,}965$ (Fließen bei *c*); die Ausnutzungslinien sind in Abb. 7 dargestellt; die gestrichelten Linien dieser Figur werden später erläutert.

Es gibt Fälle, wo der Momentenausgleich bereits im elastischen Zustand vorhanden ist, z. B. der beiderseits eingespannte Balken mit Einzellast in der Mitte, wo $M = \mp P l/8$. Hier sind die Ausnutzungslinien für die meist beanspruchten Schnitte Geraden wie in Abb. 3, wo hier ω statt ν und ν statt μ zu setzen wäre, und es wird $\omega_s = 1$, die Plastizität kommt also gar nicht zur Geltung. Die Vorschriften, die bei Ermittlung der Spannungen nach der Elastostatik *allgemein* höhere Spannungen zulassen, um dem günstigen Einfluß der Plastizität Rechnung zu tragen, müssen demnach als Notbehelf betrachtet werden; maßgebend ist hier vielmehr die Größe ω_s.

Abb. 8 behandelt den Einfluß einer elastisch senkbaren Mittelstütze auf das Verhalten eines Zweifeldträgers mit der dargestellten Belastung. Im elastischen Zustand ist dabei

$$M_a = (-0{,}1785 + C)\, P l, \qquad M_c = (0{,}085 + 0{,}7\, C)\, P l, \tag{40}$$

wobei C eine die elastische Nachgiebigkeit der Stütze kennzeichnende positive Konstante bedeutet; je nach ihrer Größe wird der Fließzustand entweder im Stütz- oder im Lastquerschnitt zuerst erreicht. Der Endzustand ist von C unabhängig, da das System statisch bestimmt wird;

es ist

$$-M_a = M_e = M_s = 0{,}124\, P_s\, l\,. \tag{41}$$

Die Ausnutzungslinien sind im elastischen Zustand durch

$$\nu_a = (-1{,}45 + 8{,}1\, C)\,\omega\,, \qquad \nu_e = (0{,}69 + 5{,}7\, C)\,\omega \tag{42}$$

gegeben; ihr weiterer Verlauf ist leicht zeichnerisch zu finden, da die Endwerte bekannt sind. In Abb. 8 zeigt die volle Linie den Fall unnachgiebiger Auflager; bei $C = 0{,}03$ kommt der Schnitt über der Stütze später zum Fließen als im vorgenannten Fall, bei $C = 0{,}0555$ ist gerade der elastische Ausgleich vorhanden, d. h. die Plastizität wird gar nicht herangezogen und bei $C = 0{,}1$ schließlich fließt der Querschnitt unter der Last zuerst. Mit wachsender elastischer Nachgiebigkeit der Stütze drehen sich die für den elastischen Zustand gültigen Teile der Ausnutzungslinien um den Ursprung.

Neben den eben betrachteten, von der Belastung des Tragwerks abhängigen Auflagersenkungen können auch solche aus fremder Ursache eintreten; bei einer auf schweren Pfeilern ruhenden Brücke mit leichtem Überbau können z. B. durch das Eigengewicht der ersteren Senkungen entstehen, an denen der Überbau ganz unbeteiligt ist, die in ihm aber, solange er elastisch bleibt, beträchtliche Spannungen hervorrufen. Für den oben behandelten Lastfall ist dann

$$M_a = -0{,}1785\, Pl + K\,, \quad M_e = 0{,}085\, Pl + 0{,}7\, K\,. \tag{43}$$

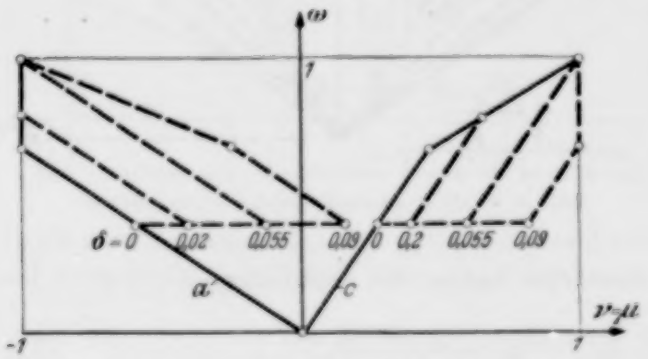

Abb. 9. Einfluß erzwungener Senkungen.

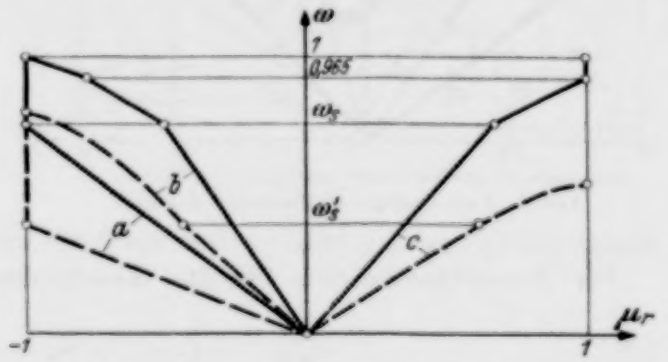

Abb. 10. Ausnutzung der Randfaser im Falle der Abb. 7.

worin K eine den Einfluß einer einmaligen Setzung der Mittelstütze ausdrückende Größe bedeutet. Gleichung (41) bleibt bestehen und es wird im elastischen Zustand

$$\nu_a = -1{,}45\,\omega - 8{,}1\,\delta\,, \qquad \nu_e = 0{,}69\,\omega - 5{,}7\,\delta\,, \qquad \delta \equiv \frac{K}{P_s\, l}\,. \tag{44}$$

Vor Eintritt der Setzung ist natürlich $K = \delta = 0$. Abb. 9 gibt die Darstellung für $\delta = 0{,}02$, $\delta = 0{,}055$ und $\delta = 0{,}09$, wobei angenommen ist, daß die Setzung eintritt, nachdem das Tragwerk eine Ausnutzung $\omega = 0{,}4$ erreicht hat. Wiederum tritt mit Vergrößerung der Setzung die Plastizierung über der Stütze später ein und schließlich fließt, wenn $\delta > 0{,}055$, der Lastquerschnitt als erster. Der Fall $\delta = 0{,}055$ entspricht wieder dem elastischen Ausgleich; er wird im Stahlbau manchmal durch künstliche Überhöhung von Auflagern herangezogen, um einen Träger konstanten Querschnitts ohne Rückgriff auf die Plastizität möglichst gleichmäßig auszunutzen. Die für den elastischen Zustand gültigen Teile der Ausnutzungslinien verschieben sich hierbei parallel zu sich selbst.

Schließlich soll noch das Verhalten des Tragwerks für den Fall erörtert werden, daß die Stabquerschnitte allgemeine Form besitzen, so daß $\nu_s < 1$ ist. Im elastischen Zustand ändert sich hierdurch nichts, doch setzt das erste Fließen jetzt früher ein. Bei dem Lastabfall Ab. 7 z. B. wird die obere Gültigkeitsgrenze der elastostatisch bedingten Gleichungen (31) und (35) von ω_s auf einen geringeren Wert ω'_s herabgesetzt. Man erkennt leicht, daß allgemein

$$\omega'_s = \omega_s\,|\nu_s| \tag{45}$$

ist.

Im Gegensatz zum idealen I-Träger ist hiermit die Aufnahmefähigkeit des betreffenden Querschnitts nicht erschöpft, sondern seine Ausnutzung nimmt, wenn auch jetzt langsamer, weiterhin zu; in den geringer beanspruchten Schnitten dagegen nimmt sie jetzt schneller zu als bisher. An die Stelle von (32) und (36) tritt demnach hier eine verwickelte Beziehung, die sich auf die geo-

metrische Verträglichkeit der Formänderungen das allmähliche Eindringen des Fließvorganges in den Querschnitt und seine Ausdehnung auf die Nachbarschnitte zu stützen hätte; für einen Sonderfall wurde dies in der oben genannten früheren Arbeit des Verfassers behandelt. Das qualitative Ergebnis ist gestrichelt in Abb. 7 angegeben. Wesentlich ist hierbei, daß wegen der geometrischen Verträglichkeit volle Ausnutzung, $\nu = 1$, und damit unendliche Dehnung niemals in einem Querschnitt allein, sondern nur in mindestens drei Schnitten zugleich auftreten kann, im vorliegenden Falle also in a, b und c. Volle Ausnutzung des Tragwerkes, $\omega = 1$, ist somit erst möglich, wenn die Fließgelenke voll wirksam sind, d. h. wenn $-\nu_a = -\nu_b = \nu_c = 1$.

Demgegenüber wurde im Schrifttum teilweise die Ansicht vertreten, daß man zwar den Momentenausgleich heranziehen dürfe, das Tragvermögen des Querschnitts aber mit dem Fließbeginn, $\nu = \nu_s$, als erschöpft ansehen solle. Damit verwirrt man aber die Begriffe; denn Abb. 7 zeigt deutlich, daß mit $-\nu_a = \nu_s$ der Ausgleich in den Querschnitten überhaupt erst beginnt und weit davon entfernt ist, vollständig zu sein. Auch das sog. Traglastverfahren ist in dieser Hinsicht logisch unbefriedigend, da es bei Untersuchung der Querschnitte eine Plastizität überhaupt nicht zur Kenntnis nimmt; praktisch spielt dies zwar im Stahlbau, wegen $\nu_s \approx 1$, keine große Rolle. Der Irrtum stammt daher, daß man den Momentenausgleich vielfach als nur den Gleichgewichtsbedingungen unterworfen angesehen und der neben diesen stets bestehenden Bedingung geometrischer Verträglichkeit keine Beachtung geschenkt hat.

Abb. 10 stellt noch die Ausnutzung der Randfaser, μ_r, in Abhängigkeit von ω für den Lastfall der Abb. 7 dar; die vollen Linien beziehen sich wieder auf den idealen I-Träger und stimmen, da hierbei $\nu = \mu_r$ ist, mit denen der Abb. 7 überein. Die gestrichelten Linien betreffen irgend einen symmetrischen Querschnitt. Für den Schnitt a wird $\mu_r = 1$, also $\nu = \nu_s$, wenn $\omega = \omega_s'$ ist. Darnach bleibt $\mu_{ra} = 1$, während für die beiden anderen Schnitte, b und c, die Ausnutzung schneller zunimmt als bisher. Die Ausnutzungen, für die $\mu_{rb} = 1$ und $\mu_{rc} = 1$ wird, kann man ohne Schwierigkeit aus Abb. 7 entnehmen, indem man dort $-\nu_b = \nu_s$ bzw. $\nu_c = \nu_s$ setzt.

(Eingegangen am 29. Oktober 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *H. Craemer*, Alexandria (Ägypten), Bulkeley, Immeuble Binoor.

Berichtigung

zu meiner Arbeit im Bd. XIX, S. 378 des Ingenieur-Archivs: „Tragwerksauslenkung unter bewegter Last".

Von **E. Pestel.**

Die Formeln der Arbeit sind nur gültig, wenn für die $\varphi_{ni}(x)$ Formfunktionen eingesetzt werden, die von der Stellung der Last unabhängig sind. Sollen die Formeln in der dort angegebenen Allgemeinheit gültig sein, so ist $q_{ni}(t_i)\,\varphi_{ni}(x)$ durch $q_n(t)\,\varphi_n\big(x;\,x_i(t)\big)$ zu ersetzen und dann unter dem Summenzeichen in 2a)

$$+\,2\,\dot{q}_n\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\,c_i+q_n\,\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_i^2}\,c_i^2+q_n\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\,\ddot{x}_i$$

sowie unter dem Summenzeichen in 2b)

$$+\left(2\,\dot{q}_n\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\,c_i+q_n\,\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_i^2}\,c_i^2+2\,q_n\,\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x\,\partial x_i}\,c_i^2+q_n\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\,\ddot{x}_i\right)_{x=x_i}$$

hinzuzufügen.

Dieselben Ergänzungen sind ferner in den zugehörigen Ausdrücken für die virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte und in (2.3) zu machen.

Das in der Arbeit entwickelte Lösungsverfahren, das von (2.2) ausgeht, wird von der Berichtigung nicht betroffen.

(Eingegangen am 5. April 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *E. Pestel*, Hildesheim, Kaiser-Friedrichstraße 15a.

Mechanische Schwingungen. Von **J. P. den Hartog**, Professor of Mechanical Engineering Massachusetts Institute of Technology. Zweite Auflage. Übersetzt und bearbeitet nach der dritten amerikanischen Auflage von **Gustav Mesmer,** Professor für Mechanik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Mit 299 Abbildungen. XVI, 427 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 42.—

Aus den Besprechungen: ... Wer sich mit Schwingungsproblemen herumzuschlagen hat, weiß sowohl Hartogs Originalarbeit als auch die gut gelungene Übersetzung und Bearbeitung von Mesmer zu schätzen. Zwischen der abstrakten, vollständigen und strengen Theorie und unsichern, zweifelhaften Methoden wurde der richtige Schlüssel gefunden, um dem Studenten wie dem Praktiker die Problemlösung real zu ermöglichen. Außerdem wurde sämtliche einschlägige Literatur zusammengefaßt, so daß kaum ein Schwingungsproblem bestehen dürfte, für welches nicht ein „Kraut gewachsen" ist ... „Technische Rundschau"

Handbuch für die Berechnung von Kanälen, Leitungen und Durchlässen des Wasserbaues. Bearbeitet und herausgegeben von **E. Wild,** Leitender Stadtbaudirektor a. D. der Groß-Berliner Stadtentwässerung, Berlin, unter Mitwirkung von **O. Schöberlein,** Magistratsbaurat a. D., Berlin. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 11 Tafeln und 24 Abbildungen. VII, 97 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 28.50

Aus den Besprechungen: ... Der berufstätige Ingenieur und Techniker wird die Wiederherausgabe dieses auf den neuesten Stand der Normung erweiterten Tabellenwerkes sehr begrüßen, ersparen ihnen doch die Autoren die ganze Rechenarbeit oder beschränken dort, wo es nicht restlos anders möglich ist, diese auf ein Minimum. Aus den, nebenbei gesagt, sehr genau errechneten Tabellen können, je nach Bedarf, ohne weiteres Rohrlichtweiten, Durchflußmengen, Durchflußgeschwindigkeiten, Kanalgefälle, leistungsfähigste und wirtschaftlichste Querschnitte, Querschnittflächen, Umfänge, hydraulische Radien, Wurzeln aus dem Gefälle usw. direkt entnommen werden. ... Der ganze Aufbau ist so klar und übersichtlich, daß sich auch Nichtfachleute dieses Tabellenwerkes bedienen können. Welcher Zeichner, Techniker oder Betriebspraktiker ist nicht schon in die Lage gekommen, schnell den Durchmesser eines Reservoirüberlaufes oder Ablaufes ermitteln zu müssen, ohne aber Zeit für langwierige Rechnungen zu haben? In allen diesen Fällen wäre ihm ein solches Tabellenwerk sehr willkommen gewesen. Womit angedeutet sei, daß das vorliegende Werk nicht nur Tiefbaufachleuten sehr empfohlen werden kann, sondern schlechthin auch allen jenen, die sich mit mannigfältigen betrieblichen Aufgaben zu befassen haben. „Technische Rundschau"

Talsperren-Meßtechnik. Meßverfahren, Instrumente und Apparate für die Prüfung der Bauwerke in Massenbeton. Von Dr. sc. techn. konsult. Ingenieur **A. U. Huggenberger,** Zürich. Mit 168 Abbildungen. VII, 132 Seiten. 1951. DM 22.50

Der Bau einer modernen Talsperre erfordert enorme Geldmittel. Ihre Zerstörung, durch die viele Millionen Kubikmeter Wasser plötzlich zum Abfluß frei werden, kann zu einer Katastrophe größten Ausmaßes führen. Bauherrschaft und Behörden haben daher die Pflicht, alles zu unternehmen, was zur Erhöhung der Wirtschaftlichkeit und Sicherheit beiträgt. Beobachten und Messen sind die grundlegenden Mittel zur Erreichung dieses Zieles. Bauherr und oberste Bauleitung, denen die finanziellen Belange unterstehen, haben ein Interesse zu wissen, wie und was für meßtechnische Mittel ihnen gestatten, Einblick in die tatsächliche Ausnützung und Tragfähigkeit der Baustoffe und Bauteile zu geben. Der Bauingenieur, dem Projektierung und Ausführung unterstehen, ist mit der Theorie und Berechnung vertraut. Er wünscht zu wissen, wie weit die Berechnungsgrundlagen, denen zahlreiche Annahmen und Voraussetzungen anhaften, mit dem tatsächlichen Verhalten des Bauwerkes übereinstimmen. Auch für ihn ist die Meßtechnik meistens ein neues, unbekanntes Gebiet. Es besteht daher das Bedürfnis nach einem allgemein verständlichen Überblick über Beobachtungsverfahren, Instrumente, Apparate und Meßanlage, über Einbaumöglichkeit und Handhabung. Das vorliegende Buch füllt diese Lücke aus.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. Von Dr.-Ing. **Arthur Pröll,** Professor i. R. an der Technischen Hochschule in Hannover. Mit 278 Textabbildungen. XVI, 612 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 48.—

Aus den Besprechungen: Der Verfasser, von dem im Jahre 1919 ein Buch über Flugtechnik erschienen war, veröffentlicht auf dieser Grundlage ein ausführliches Werk über Aeromechanik und Flugmechanik. Gefördert von dem Verlangen nach Verbesserungen in der Flugtechnik, hat die Aerodynamik in den letzten Jahrzehnten einen bedeutenden Aufschwung genommen. Die schon lange vorhandenen Erkenntnisse über ideale Flüssigkeiten, Potentialströmungen sind mit neueren Erkenntnissen über wirkliche Flüssigkeiten zu einer fruchtbaren Synthese verbunden worden. Dieses Wissen hat besonders seit dem ersten Weltkrieg die Entwicklung der modernen Flugtechnik gefördert und diese zu großer Vollkommenheit geführt. Der Verfasser war an dieser Entwicklung in hervorragendem Maße beteiligt. Sein Werk gibt als erstes nach dem zweiten Weltkrieg einen Überblick über dieses Wissensgebiet ... Das Werk zeichnet sich in erster Linie durch die Fülle des Gebotenen aus. Seien es aerodynamische oder flugtechnische Fragen, man wird, wenn sie nicht ausführlich behandelt sind, zumindest einen Hinweis zum eingehenden Studium finden. Dieser Vorteil in Verbindung mit zahlreichen anderen ergibt ein wirklich ausgezeichnetes Buch, für das man dem Verfasser dankbar sein kann. Die Ausstattung des Buches ist sehr gut.

„Maschinenbau und Wärmewirtschaft"

Die Welt der Vektoren. Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren. Von Dr.-Ing., Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff,** Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums, The Hebrew Technical College, Haifa (Israel). Mit 68 Textabbildungen. VIII, 470 Seiten. 1950. DM 37.50; Ganzleinen DM 40.—

Aus den Besprechungen: ... Der Verfasser führt seine Leser mit Leichtigkeit aus dem gewohnten euklidischen Raum in die abstrakten Mannigfaltigkeiten von Minkowski, Riemann und Hilpert, deren Metrik der Anschauung nicht mehr zugänglich ist. Die in eleganter Form gebrachten Anwendungen auf Weltvektoren und Materiewellen beweisen die Einfachheit der Methodik, die die eingeführten Tensoren und Operatoren ermöglichen. Der Verfasser wollte bestimmt kein Lehrbuch der Physik schreiben, aber er bietet durch seine äußerst glückliche Konzipierung gerade dem Physiker viel. Alles in allem ein ausgezeichnetes Werk, für dessen Herausgabe man Autor und Verlag nur danken kann. „Österreichisches Ingenieur-Archiv"

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von Professor Dr. phil. **H. Hornich,** Graz. Mit 34 Textabbildungen. VII, 216 Seiten. 1950. DM 19.50; Ganzleinen DM 21.60

Das Buch gibt eine Einführung in die Funktionentheorie und will vor allem den Weg zum Verständnis ihrer zahllosen Anwendungen in Physik und Technik erschließen. An Kenntnissen werden nur die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Zuerst werden die auf einem Gebiet der Ebene eindeutigen Funktionen untersucht und erst mit der analytischen Fortsetzung auch die mehrdeutigen Funktionen behandelt. Jedem Abschnitt sind Beispiele zur Übung und Ergänzung des Stoffes beigegeben.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. K 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040